UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4nouvellesannal10pari

24756
I

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME X.

(LXIXe VOLUME DE LA COLLECTION.)

117247
13/7/11

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

QA
1
N8
v. 69

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R1c]

SUR LA « GÉOMÉTRIE DES FEUILLETS » DE M. RENÉ DE SAUSSURE. ÉTUDE ANALYTIQUE;

PAR M. R. BRICARD.

INTRODUCTION.

M. René de Saussure a abordé la Géométrie cinématique à un point de vue nouveau. Il considère la *multiplicité* constituée par l'ensemble des positions, dépendant de six paramètres, que peut prendre un solide entièrement libre dans l'espace, et il étudie les diverses formes existant dans cette multiplicité.

Si un solide est assujetti à des conditions, dont le nombre peut varier de un à cinq, l'ensemble de ses positions constitue une *forme* à cinq, quatre, trois, deux ou un paramètres. C'est ce qu'il appelle respectivement une *pentasérie*, une *tétrasérie*, une *trisérie*, une *bisérie* ou une *monosérie*.

Une monosérie est donc en particulier l'ensemble, simplement infini, des positions que prend un solide assujetti à cinq conditions.

Les positions prises par un corps, dans un mouve-

ment *physique* quelconque, forment toujours une monosérie, parce qu'elles dépendent du temps, qui n'a qu'une dimension.

C'est à cause de cette importance physique des monoséries que leur étude est en général considérée comme essentielle. Les séries d'ordre supérieur apparaissent, avec les idées courantes, comme moins intéressantes et de nature plus compliquée, parce qu'elles correspondent à des fonctions contenant un nombre de variables indépendantes de plus en plus considérable. Au contraire, au point de vue de M. de Saussure, qui classe les mouvements, non d'après le nombre des *paramètres* dont ils dépendent, mais d'après le nombre des *conditions* auxquelles est soumis le solide mobile, une série doit être considérée comme d'autant plus simple que son rang est plus élevé.

C'est ainsi par exemple qu'en Géométrie ponctuelle de l'espace, une courbe est plus simple qu'une surface, si l'on introduit une représentation paramétrique. Une surface est au contraire plus simple qu'une courbe, si l'on a égard au nombre des conditions auxquelles satisfait un point de l'être considéré : une surface a une équation, une courbe en a deux. De même, en Géométrie réglée, l'étude du complexe précède celle de la congruence, et l'étude de la congruence celle de la surface réglée.

Tel est le point de vue original et fécond auquel s'est placé M. de Saussure, et ses recherches ont abouti à la constitution de la *Géométrie des feuillets* [1].

---

[1] Voici la raison de cette dénomination : M. de Saussure, qui a poursuivi ses études par la voie synthétique, a substitué à la considération incommode d'un corps solide indéfini celle d'une figure de nature aussi simple que possible, et dont la position une fois connue détermine sans ambiguïté celle d'un corps qu'on lui suppose

Il a d'abord reconnu que dans cette Géométrie une relation joue un rôle primordial : c'est celle qui existe entre deux positions telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une rotation simple. Les deux positions sont alors dites *réciproques*. Il a ensuite fait ressortir l'importance de certaines séries particulières de positions, dites *couronne, couronoïde* et *hypercouronoïde*, qui définissent ce que l'auteur appelle *rotation à* 1, 2 *et* 3 *paramètres*, et enfin de la *pentasérie linéaire* (le sens de cette épithète apparaîtra par la suite) constituée par l'ensemble des ∞^5 positions réciproques d'une position donnée. Les relations qui existent entre ces diverses séries ont amené M. de Saussure à reconnaître une analogie remarquable entre la Géométrie des feuillets et la Géométrie réglée, ainsi qu'à entrevoir l'existence d'une pentasérie linéaire plus générale que celle qu'il a définie et qui correspondrait au complexe linéaire de droites ([1]).

---

lié. Une telle figure est le *feuillet*, constitué par une droite orientée, un point de cette droite et un plan orienté qui la contient. (On voit que cette figure ne contient plus aucun paramètre de grandeur.) Dans les développements qui vont suivre, je suppose la figure liée à un trièdre trirectangle. Je dirai donc, au lieu de *feuillet*, *trièdre* ou encore *position*. Il convient cependant de conserver à la *Géométrie des feuillets* le nom que lui a donné son créateur.

([1]) Voici les titres des principaux Mémoires que M. de Saussure a consacrés à la Géométrie des feuillets :

Cinématique des fluides. Note parue dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles*, Genève, t. V, 1898, p. 497.

Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe (*Comptes rendus*, 23 décembre 1901).

Théorie géométrique du mouvement des corps (*Arch. des Sc. ph. et nat.*, Genève, 1902 et 1904).

La Géométrie des feuillets (*Id.*, 1906).

(Ces deux dernières études ont été tirées à part sous forme de brochures en vente à la librairie Kündig, Corraterie, Genève.)

Je me propose dans ce travail de reprendre les théories de M. de Saussure par la voie analytique. Voici les résultats essentiels auxquels on parvient :

On peut représenter toute position d'un corps solide par un système de huit coordonnées homogènes, liées par une relation, et semblables aux six coordonnées plückériennes d'une droite ([1]).

La condition de réciprocité de deux positions a la même forme que les conditions de rencontre de deux droites.

La Géométrie des feuillets est d'après cela entièrement analogue à la Géométrie réglée (*mutatis mutandis*, puisqu'on a affaire à deux coordonnées de plus). En particulier, il existe une pentasérie linéaire générale, correspondant au complexe linéaire de droites.

Tous les faits établis par M. de Saussure et ceux qu'il a conjecturés avec tant de sagacité reçoivent donc une confirmation complète.

La Geometrio folietara. Articles en esperanto parus dans *l'Internacia Scienca Revuo*, Genève, 1908 et 1909.

(Brochure à part en vente chez Kündig.)

Je signale particulièrement ce dernier travail, où les idées de l'auteur ont pris leur forme définitive.

Il a été rendu compte de la première Partie de la *Geometrio folietara*, dans les *Nouvelles Annales*, 1909, p. 422. Cette première Partie est consacrée à la Géométrie cinématique du plan, beaucoup plus simple naturellement que celle de l'espace. Elle correspond à la Géométrie ponctuelle de l'espace et présente ainsi un caractère *linéaire*, tandis que la Géométrie cinématique de l'espace présente, comme la Géométrie réglée, un caractère *quadratique*.

Je ne m'occuperai que de la Géométrie des feuillets de l'espace.

([1]) Ces huit coordonnées se rencontrent déjà, sous une forme différente, dans un Mémoire d'Olinde Rodrigues inséré au *Journal de Liouville*, t. V, 1840. M. Study les a retrouvées, en faisant usage de l'algorithme des biquaternions, dans son important travail sur les groupes des mouvements (*Mathematische Annalen*, t. XXXIX, 1891). Mais il ne me semble pas qu'on ait encore signalé l'analogie de ces coordonnées avec les coordonnées plückériennes de la droite.

I. — Coordonnées d'un trièdre trirectangle.

Soient $O_0x_0y_0z_0$ un trièdre trirectangle fixe, $Oxyz$ un trièdre trirectangle variable (de même orientation que le premier), avec lequel on suppose entraînée une figure de grandeur constante. Pour fixer le trièdre $Oxyz$, on peut se donner les coordonnées ξ, η, ζ du point O et les neuf cosinus directeurs des axes Ox, Oy, Oz, par rapport au trièdre $O_0x_0y_0z_0$.

Un premier progrès consiste à exprimer les neuf cosinus directeurs en fonction de quatre paramètres homogènes λ, μ, ν, ρ. On obtient ainsi des formules, dites *d'Euler* ou *d'Olinde Rodrigues*, et dont l'utilité dans les recherches cinématiques est bien connu.

J'écris seulement, pour mémoire, la première de ces formules

$$\cos(\widehat{Ox, O_0x_0}) = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}.$$

Les paramètres λ, μ, ν, ρ ont une signification cinématique intéressante : les deux trièdres $O_0x_0y_0z_0$ et $Oxyz$ étant de même orientation, il existe un axe bien déterminé O_0u tel que le premier trièdre, tournant autour de cet axe, soit amené à avoir ses arêtes parallèles à celles du second. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de cet axe et θ l'angle de la rotation (O_0u est un vecteur et l'angle θ a un signe bien déterminé). On a

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{\alpha \sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\mu}{\beta \sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\nu}{\gamma \sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\rho}{\cos\frac{\theta}{2}} \quad [1].$$

---

[1] Pour la démonstration de ces formules, *voir* les *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs, Note X, p. 464.

Si l'on suppose donnés λ, μ, ν, ρ (non tous nuls) ces formules et la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

déterminent, on le voit tout de suite, le système des quantités α, β, γ et $\tang\frac{\theta}{2}$ au signe près, c'est-à-dire deux axes de rotation opposés et deux angles de rotation également opposés : ce qui se réduit évidemment à une seule rotation.

λ, μ, ν, ρ sont quatre des coordonnées que je veux introduire. Les quatre autres sont les quantités l, m, n, p, définies par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} l = -\rho\xi - \nu\eta + \mu\zeta, \\ m = -\rho\eta + \lambda\zeta + \nu\xi, \\ n = -\rho\zeta - \mu\xi + \lambda\eta, \\ p = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta. \end{cases}$$

Il existe visiblement entre les huit quantités l, m, n, p, λ, μ, ν, ρ la relation

$$(3)\qquad l\lambda + m\mu + n\nu + p\rho = 0.$$

Inversement, donnons-nous huit quantités l, m, n, p, λ, μ, ν, ρ liées entre elles par la relation (3), λ, μ, ν, ρ n'étant pas tous les trois nuls.

Il correspondra toujours à ce système une position du trièdre Oxyz, parfaitement déterminée.

En effet les quatre équations (2) en ξ, η, ζ forment en vertu de (3) un système compatible, et peuvent toujours être résolues d'une seule manière par rapport à ces quatre quantités, parce que les quatre déterminants de ces équations considérées trois à trois ont pour valeurs respectives, comme on le voit aisément,

$$-\rho U,\quad \lambda U,\quad \mu U,\quad \nu U,$$

en posant

$$U = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2,$$

et ne sont pas tous nuls, en vertu de l'hypothèse faite sur λ, μ, ν, ρ.

En second lieu, comme on l'a déjà vu, la rotation qui amène le trièdre $O_0 x_0 y_0 z_0$ à avoir ses arêtes parallèles à celles du trièdre $Oxyz$ est également bien déterminée.

En résumé, *on peut faire correspondre à toute position du trièdre* $Oxyz$, *et de façon biunivoque, un système homogène de huit nombres* l, m, n, p, λ, μ, ν, ρ, *liés entre eux par la relation* (3). Ces huit nombres seront dits les *coordonnées* du trièdre $Oxyz$.

II. — Réciprocité de deux trièdres.

Proposons-nous le problème suivant :

Soient deux trièdres, $Oxyz$ *et* $O'x'y'z'$, *de coordonnées respectives* $(l, m, \ldots, \rho)$ *et* $(l', m', \ldots, \rho')$.

Trouver la relation entre ces coordonnées, qui exprime qu'il existe une rotation simple, amenant le premier trièdre à coïncider avec le second, c'est-à-dire que les deux trièdres sont réciproques, *au sens donné dans l'introduction.*

Faisons intervenir pour un moment les coordonnées ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' des points O et O' par rapport à $O_0 x_0 y_0 z_0$. On a les formes (2) et les formules analogues

$$(4)\qquad \begin{cases} l' = -\rho'\xi' - \nu'\eta' + \mu'\zeta', \\ m' = -\rho'\eta' - \lambda'\zeta' + \nu'\xi', \\ n' = -\rho'\zeta' - \mu'\xi' + \lambda'\eta', \\ p' = \lambda'\xi' + \mu'\eta' + \nu'\zeta'. \end{cases}$$

Soient λ_1, μ_1, ν_1, ρ_1 les paramètres d'une rotation R_1,

d'axe Ou_1, qui amène le trièdre $Oxyz$ à avoir ses arêtes parallèles à celles de $O'x'y'z'$. En général un mouvement hélicoïdal, d'axe parallèle à Ou_1, est nécessaire pour amener $Oxyz$ à coïncider avec $O'x'y'z'$, et la translation qui entre dans ce mouvement a pour valeur la projection du segment OO' sur Ou_1. Pour que le mouvement hélicoïdal se réduise à une rotation, il faut et il suffit que cette projection soit nulle, c'est-à-dire que OO' soit perpendiculaire à Ou_1, ce qui se traduit par la relation

$$(5) \qquad \lambda_1(\xi - \xi') + \mu_1(\eta - \eta') + \nu_1(\zeta_1 - \zeta') = 0.$$

Il reste à calculer λ_1, μ_1 et ν_1.

Appelons R la rotation de paramètres λ, μ, ν, ρ et R' la rotation de paramètres λ', μ', ν', ρ'. R_1 peut être considérée comme étant le *produit* des deux rotations R^{-1} et R', effectuées dans l'ordre indiqué. En effet R^{-1}, rotation inverse de R, amène $Oxyz$ à avoir ses axes parallèles à ceux de $O_0x_0y_0z_0$, et R' amène ce dernier trièdre à avoir ses axes parallèles à ceux de $O'x'y'z'$.

On a donc symboliquement

$$R_1 = R^{-1}.R'.$$

Remarquons que R^{-1} a pour paramètres

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad -\rho,$$

comme cela résulte tout de suite des formules (1), où l'on change le signe de θ.

Appliquons maintenant un résultat connu de la théorie des quaternions [1] : considérons les trois

---

[1] Pour cette application de la méthode des quaternions à la composition des rotations, consulter la note X déjà citée du *Traité de Cinématique* de M. Kœnigs.

quaternions

$$\begin{aligned} s &= -\rho + \lambda i + \mu j + \nu k, \\ s' &= \rho' + \lambda' i + \mu' j + \nu' k, \\ s_1 &= \rho_1 + \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k, \end{aligned}$$

où i, j, k sont les unités satisfaisant aux relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j, \qquad ij = -ji = k.$$

On sait que la relation symbolique écrite plus haut

$$R_1 = R^{-1}.R'$$

se traduit par l'identité

$$s_1 = s's.$$

Développons les calculs : on a

$$\begin{aligned} &\rho_1 + \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k \\ &\quad = (\rho' + \lambda' i + \mu' j + \nu' k)(-\rho + \lambda i + \mu j + \nu k), \end{aligned}$$

d'où en effectuant le produit du second membre d'après les règles connues, et en égalant séparément les parties scalaires et les cofficients des trois unités,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho\rho' - \lambda\lambda' - \mu\mu' - \nu\nu', \\ \lambda_1 &= \lambda\rho' - \rho\lambda' + \nu\mu' - \mu\nu', \\ \mu_1 &= \mu\rho' - \rho\mu' + \lambda\nu' - \nu\lambda', \\ \nu_1 &= \nu\rho' - \rho\nu' + \mu\lambda' - \lambda\mu'. \end{aligned}$$

Substituant les valeurs précédentes de λ_1, μ_1, ν_1 dans la relation (5), il vient

$$\begin{aligned} &(\lambda\rho' - \rho\lambda' + \nu\mu' - \mu\nu')(\xi - \xi') \\ &+ (\mu\rho' - \rho\mu' + \lambda\nu' - \nu\lambda')(\eta - \eta') \\ &+ (\nu\rho' - \rho\nu' + \mu\lambda' - \lambda\mu')(\zeta - \zeta') = 0. \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\rho'(-\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta)+\rho(-\lambda'\xi'+\mu'\eta'+\nu'\zeta')\\
&-\lambda'(-\rho\xi-\nu\eta+\mu\zeta)+\lambda(-\rho'\xi'-\nu'\eta'+\mu'\zeta')\\
&-\mu'(-\rho\eta-\lambda\zeta+\nu\xi)+\mu(-\rho'\eta'-\lambda'\zeta'+\nu'\xi')\\
&+\nu'(-\rho\zeta-\mu\xi+\lambda\eta)+\nu(-\rho'\zeta'+\mu'\xi'+\lambda'\eta')=0,
\end{aligned}$$

ou enfin, en tenant compte des formules (2) et (4),

$$(6)\qquad l\lambda'+\lambda l'+m\mu'+\mu m'+n\nu'+\nu n'+p\rho'+\rho p'=0.$$

Telle est la relation, remarquablement simple, exprimant la réciprocité de deux trièdres.

III. — Analogie de la Géométrie des feuillets et de la Géométrie réglée.

On sait que, dans l'espace, on peut attribuer à une droite six coordonnées homogènes l, m, n, λ, μ, ν, dites *coordonnées plückériennes*, et liées par la relation

$$(7)\qquad l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

La rencontre de deux droites $(l, m, \ldots, \nu)$ et $(l', m', \ldots, \nu')$ s'exprime par la condition

$$(8)\qquad l\lambda'+\lambda l'+m\mu'+\mu m'+\nu n'+n\nu'=0.$$

On voit que les relations (3) et (6) sont semblables de formes aux relations (7) et (8), respectivement.

Cela suffit à établir la parfaite analogie de la Géométrie des feuillets et de la Géométrie réglée : au lieu de droites, on considérera les positions d'un trièdre trirectangle, et la rencontre de deux droites sera remplacée par la réciprocité de deux positions. On n'a donc qu'à se guider sur la Géométrie réglée pour établir la Géométrie des feuillets dans ses points essentiels. Seulement, comme on a affaire à une multiplicité à six paramètres, au lieu de quatre, on rencontrera dans la nouvelle Géométrie une plus grande variété de formes.

IV. — La pentasérie linéaire.

La première forme qui se présente en Géométrie réglée est le *complexe linéaire*, ensemble des droites dont les coordonnées satisfont à une relation linéaire. Nous allons de même chercher à étudier la *pentasérie linéaire*, ensemble des trièdres $Oxyz$ dont les coordonnées satisfont à une relation

$$(9) \qquad Al + Bm + Cn + Dp - \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\rho = 0,$$

où A, B, C, D, α, β, γ, δ sont des coefficients constants.

Remarquons en premier lieu que, si ces coefficients satisfont à la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0,$$

il existe un trièdre de coordonnées α, β, γ, δ, A, B, C, D et l'équation (9) exprime que le trièdre considéré est réciproque à celui-là. On a donc un premier exemple particulier de pentasérie linéaire, constituée par l'ensemble des trièdres qui sont réciproques à un trièdre donné. Une telle pentasérie linéaire sera dite *spéciale*, par analogie avec le *complexe linéaire spécial*, lieu des droites qui rencontrent une droite fixe.

Revenons au cas général. Si dans l'équation (9) on remplace l, m, n, p par leurs valeurs (2), l'équation devient

$$\begin{aligned}(10) \quad & (-A\rho - B\nu + C\mu + D\lambda)\xi + (-B\rho + C\lambda - A\nu - D\mu)\eta \\ & + (-C\rho + A\mu - B\lambda + D\nu)\zeta + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\rho = 0.\end{aligned}$$

On peut donner à cette equation une forme plus simple. Soit, en effet, $O_0x'_0y'_0z'_0$ le trièdre qu'on obtient en soumettant le trièdre $O_0x_0y_0z_0$ à la rotation

dont les paramètres sont

$$A, \quad B, \quad C, \quad D.$$

On passera de $O_0 x'_0 y'_0 z'_0$ à $Oxyz$ en composant les deux rotations dont les paramètres sont

$$-A, \quad -B, \quad -C, \quad D \qquad \text{et} \qquad \lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \rho.$$

Les paramètres $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$ de cette nouvelle rotation s'obtiennent en développant la relation entre quaternions

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\rho_1 + \lambda_1 i - \mu_1 j + \nu_1 k \\ &\quad = (\rho + \lambda i + \mu j - \nu k)(D - Ai - Bj - Ck), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= -A\rho + B\nu - C\mu - D\lambda, \\ \mu_1 &= -B\rho + C\lambda - A\nu - D\mu, \\ \nu_1 &= -C\rho + A\mu - B\lambda + D\nu, \\ \rho_1 &= -D\rho + A\lambda - B\mu - C\nu. \end{aligned} \right.$$

On voit que λ_1, μ_1, ν_1 ne sont autres que les coefficients de ξ, η, ζ dans l'équation (10). Cette dernière peut donc s'écrire

$$(13) \qquad \lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \zeta + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\rho = 0.$$

On peut ensuite résoudre le système (12) par rapport à λ, μ, ν, ρ. On obtient la valeur de ces quantités, plus rapidement que par la résolution directe, en multipliant *à droite* les deux membres de l'identité (11) par le quaternion

$$D + Ai - Bj + Ck.$$

Il vient ainsi

$$\rho + \lambda i - \mu j - \nu k = \frac{(\rho_1 + \lambda_1 i - \mu_1 j - \nu_1 k)(D - Ai - Bj - Ck)}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2},$$

d'où l'on tire λ, μ, ν, ρ.

Les valeurs obtenues sont des fonctions linéaires et homogènes de λ_1, μ_1, ν_1, ρ_1, qu'il est inutile d'écrire.

En les portant dans l'équation (13), celle-ci prend la forme

$$\lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta - \alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \gamma_1\nu_1 - k\rho_1 = 0,$$

où α_1, β_1, γ_1, k sont des constantes. Remplaçons enfin le trièdre de référence $O_0x_0y_0z_0$ par le trièdre $O_1x_1y_1z_1$, qui en provient par la translation de composantes $-\alpha_1$, $-\beta_1$, $-\gamma_1$, et posons

$$\xi + \alpha_1 = \xi_1, \qquad \eta + \beta_1 = \eta_1, \qquad \zeta + \gamma_1 = \zeta_1.$$

L'équation de la pentasérie linéaire prendra la forme réduite

$$(14) \qquad \lambda_1\xi_1 + \mu_1\eta_1 + \nu_1\zeta_1 - k\rho_1 = 0,$$

où λ_1, μ_1, ν_1, ρ_1 sont les composantes d'une rotation amenant un certain trièdre fixe $O_1x'_1y'_1z'_1$ (d'axes parallèles à ceux du trièdre $O_0x'_0y'_0z_0$) à avoir ses axes parallèles à ceux du trièdre $Oxyz$. k est une constante.

Il est facile d'interpréter géométriquement l'équation (14). Considérons en effet le mouvement hélicoïdal qui amène le trièdre $O_1x'_1y'_1z'_1$ en coïncidence avec le trièdre $Oxyz$. Appelons H_1 la valeur de la translation et θ_1 celle de la rotation qui entrent dans ce mouvement; H_1 est la longueur de la projection du segment O_1O sur l'axe du mouvement, axe dont nous désignerons les cosinus directeurs par α_1, β_1, γ_1. On a donc

$$H_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\zeta_1;$$

mais on a, en vertu des formules (1),

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1}\cot\frac{\theta_1}{2}, \qquad \beta_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1}\cot\frac{\theta_1}{2}, \qquad \gamma_1 = \frac{\nu_1}{\rho_1}\cot\frac{\theta_1}{2}.$$

Il en résulte

$$H_1 = \frac{\cot\frac{\theta_1}{2}}{\rho_1}(\lambda_1\xi_1 + \mu_1\eta_1 + \nu_1\zeta_1),$$

où, d'après l'équation (14),

$$H_1 \operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2} = k. \tag{15}$$

On parvient donc à la définition suivante très simple d'une pentasérie linéaire :

Une telle pentasérie est constituée par l'ensemble des positions d'un solide qu'on obtient en donnant à une position fixe un déplacement hélicoïdal dont la translation H_1 *et la rotation* θ_1 *satisfont à la relation*

$$H_1 \operatorname{tang}\frac{\theta_1}{2} = k.$$

Si $k = 0$, le déplacement hélicoïdal se réduit à une rotation, et l'on a affaire à la pentasérie spéciale dont il a été question plus haut.

Un autre cas particulier intéressant est celui où l'on a $k = \infty$. L'équation (15) se réduit alors à $H_1 = \infty$, ce qui n'a pas de sens, ou bien à

$$\theta_1 = \pi.$$

Dans la définition de cette nouvelle pentasérie linéaire particulière, la translation du mouvement hélicoïdal ne figure pas. La pentasérie est constituée par l'ensemble des positions d'un solide qu'on obtient en donnant à un solide fixe un développement hélicoïdal dont la rotation est égale à π.

Revenant à la pentasérie linéaire générale, son équation met facilement en évidence des propriétés que M. de Saussure a déjà obtenues géométriquement dans

le cas de la pentasérie spéciale. Pour ne pas allonger ce travail outre mesure, examinons simplement la question suivante :

On considère tous les solides de la pentasérie linéaire qui ont un point fixe. Leur position dépend encore de $5 - 3 = 2$ *paramètres et constitue par conséquent une bisérie. Quelle est la définition simple de cette bisérie ?*

On n'apporte aucune restriction en supposant que le point fixe considéré est le sommet O du trièdre mobile. En se reportant à la définition des coordonnées l, m, n, p, on voit que l'équation (9) se réduit à

$$a\lambda + b\mu + c\nu + d\rho = 0,$$

où a, b, c, d sont certaines constantes. En raisonnant comme précédemment, on réduira cette équation à la forme

$$\rho_1 = 0,$$

dont l'interprétation est immédiate : le trièdre $Oxyz$ reste constamment symétrique d'un certain trièdre fixe de sommet O par rapport aux droites d'une gerbe ayant le même sommet. Il revient au même de dire, d'après les propriétés élémentaires de la symétrie, que $Oxyz$ reste symétrique d'un trièdre fixe par rapport aux plans d'une gerbe de sommet O.

M. de Saussure donne à une telle bisérie le nom de *couronoïde à point fixe* et au mouvement qu'elle définit le nom de *rotation à deux paramètres*. Ainsi, *le lieu des solides d'une pentasérie linéaire qui ont un point fixe est un couronoïde* (ou une rotation à deux paramètres) *autour de ce point*. On peut rapprocher cette propriété de la suivante : *le lieu des*

droites d'un complexe linéaire qui ont un point fixe est un faisceau plan.

On établirait aussi facilement diverses propositions établies par M. de Saussure et relatives aux *couronnes* et aux *hypercouronoïdes* (rotations à un et à trois paramètres). Une couronne est la monosérie constituée par les positions provenant d'une position fixe par rotation autour d'une droite fixe; un hypercouronoïde (rotation à trois paramètres) est la trisérie constituée par la position symétrique d'une position fixe par rapport à un plan libre de l'espace.

V. — Les séries linéaires.

Nous appellerons *tétrasérie linéaire* l'intersection de deux pentaséries linéaires. Autrement dit, une tétrasérie linéaire est le lieu des positions d'un solide dont les coordonnées satisfont à deux équations linéaires

$$(16)\quad \begin{cases} A_1 l - B_1 m - C_1 n + D_1 p + \alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \delta_1 \rho = 0, \\ A_2 l - B_2 m + C_2 n + D_2 p + \alpha_2 \lambda + \beta_2 \mu + \gamma_2 \nu + \delta_2 \rho = 0. \end{cases}$$

De même, on considérera des *trisérie*s, *biséries* et *monoséries linéaires* définies par 3, 4 ou 5 équations de la forme précédente.

Parlons d'abord de la tétrasérie linéaire.

On voit que les coordonnées du solide mobile satisfont, en vertu de l'équation (16), à l'équation

$$(17)\qquad (A_1 + kA_2)l + (B_1 - kB_2)m + \ldots = 0,$$

où k désigne une constante quelconque. On peut dire que les positions qui appartiennent à une tétrasérie linéaire appartiennent à une infinité de pentaséries linéaires formant un faisceau.

Parmi ces pentaséries, il en est deux de spéciales. En

effet, pour que la pentasérie (17) ait ce caractère, il faut que les coefficients de l, m, n, ... ρ soient les coordonnées d'une position.

On doit donc avoir

$$(A_1 + kA_2)(\alpha_1 + k\alpha_2) - (B_1 + kB_2)(\beta_1 + k\beta_2)$$
$$+ (C_1 + kC_2)(\gamma_1 + k\gamma_2) + (D_1 + kD_2)(\delta_1 + k\delta_2) = 0,$$

équation du second degré en k, admettant généralement deux racines distinctes. Par conséquent :

Les positions qui appartiennent à une tétrasérie linéaire sont en général réciproques de deux positions fixes.

Cette définition est analogue à celle de la congruence linéaire en Géométrie réglée.

Passons au cas de la trisérie linéaire, définie par les équations

$$A_1 l + \ldots = 0,$$
$$A_2 l + \ldots = 0,$$
$$A_3 l + \ldots = 0.$$

Les positions qui appartiennent à la trisérie appartiennent au *réseau* des pentaséries définies par l'équation

$$(A_1 + kA_2 + k'A_3)l + \ldots = 0,$$

où k et k' sont deux constantes quelconques. Parmi ces pentaséries, il en est une infinité simple de spéciales, définies par la relation suivante entre k et k' :

$$(A_1 + kA_2 + k'A_3)(\alpha_1 + k\alpha_2 + k'\alpha_3) + \ldots = 0.$$

Ainsi *les positions qui appartiennent à une trisérie linéaire sont réciproques d'une infinité simple de positions qui forment par suite une monosérie*. Cette monosérie est d'ailleurs *linéaire* : en effet, les *huit*

coordonnées de ses positions dépendent linéairement de *deux* paramètres k et k'; on peut donc former entre ces huit coordonnées *cinq* relations linéaires et homogènes.

On raisonnera de même sur la bisérie et la monosérie linéaires. Voici le résumé de la discussion :

Les ∞^4 positions d'une tétrasérie linéaire sont réciproques de deux positions;

Les ∞^3 positions d'une trisérie linéaire sont réciproques de ∞^1 positions qui forment une monosérie linéaire;

Les ∞^2 positions d'une bisérie linéaire sont réciproques de ∞^2 positions qui forment une bisérie linéaire;

Les ∞^1 positions d'une monosérie linéaire sont réciproques de ∞^3 positions qui forment une trisérie linéaire.

On peut dire aussi :

A une monosérie (trisérie) *linéaire correspond une trisérie* (monosérie) *linéaire, telle que toute position de la monosérie* (trisérie) *soit réciproque de toute position de la trisérie* (monosérie).

A toute bisérie linéaire correspond une bisérie linéaire, telle que toute position de la première bisérie soit réciproque de toute position de la seconde.

Il en résulte qu'à une monosérie, une bisérie et une trisérie linéaires données, correspondent respectivement une trisérie, une bisérie et une monosérie linéaires *réciproques*.

Ces théorèmes correspondent (surtout le second, en raison de sa symétrie) à l'existence de l'*hyperboloïde*, où l'on trouve deux monoséries de droites, telles que

toute droite de l'une des monosérie rencontre toute droite de l'autre.

On voit encore qu'une pentasérie, une tétrasérie, ..., une monosérie, sont déterminées respectivement par 7, 6, ..., 3 positions.

De combien de paramètres dépend une série d'ordre déterminé? Une n-série est déterminée par $n+2$ positions, ce qui donnerait $6(n+2)$ paramètres. Mais chaque position peut *a priori* être assujettie à n conditions.

Le nombre cherché de paramètres se réduit ainsi à $(6-n)(n+2)$. D'après cela :

Une pentasérie	dépend de	7	paramètres
» tétrasérie	»	12	»
» trisérie	»	15	»
» bisérie	»	16	»
» monosérie	»	15	»

On voit qu'une tétrasérie et un système de deux positions dépendent du même nombre de paramètres, de même une trisérie et une monosérie; ce qui est bien d'accord avec les faits de réciprocité établis plus haut.

Il reste enfin à reconnaître combien six pentaséries linéaires ont de positions communes. Les coordonnées de la position inconnue satisfont à une équation du second degré

$$l\xi + m\eta + n\zeta + p\xi = 0$$

et à six équations linéaires. Le nombre cherché est donc ***deux***.

En particulier *il existe en général deux positions réciproques de six positions données*, de même qu'il existe en général deux droites rencontrant quatre droites données.

VI. — Conclusions.

J'ai simplement esquissé la théorie analytique de la Géométrie des feuillets. Mais il va sans dire que bien des recherches intéressantes à poursuivre se présentent d'elles-mêmes.

Tout d'abord il faudrait approfondir la nature des séries réciproques (§ V). Le cas des biséries réciproques est particulièrement à signaler, en raison de la symétrie qui s'y manifeste.

On reconnaît assez facilement que les surfaces trajectoires des points d'une position faisant partie d'une bisérie sont du *quatrième* ordre. Les courbes trajectoires des points d'une position faisant partie d'une monosérie sont du *dixième* ordre. Ces surfaces et ces courbes mériteraient d'être étudiées de plus près.

Pour compléter l'étude des pentaséries linéaires, il faudrait chercher ce qui correspond à la notion de *complexes en involution*, si importante en Géométrie réglée [1]. On serait alors conduit à introduire, au lieu des coordonnées l, m, ..., ρ, huit coordonnées ω_1,

---

[1] M. René de Saussure vient tout récemment de répondre à cette question (*Internacia Scienca Revuo*, numéros de novembre et décembre 1909) : une pentasérie linéaire est définie, d'après l'équation (15), par une position fixe C et un paramètre K. Deux pentaséries (C_1, K_1) et (C_2, K_2) seront dites en *involution* (ou *réciproques*), quand leurs paramètres K_1 et K_2 satisfont à la relation

$$h \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = K_1 + K_2,$$

où h et θ désignent la translation et l'angle du déplacement hélicoïdal qui fait passer de la position C_1 à la position C_2.

En partant de cette définition, on trouve une série de résultats analogues à ceux que R. Ball a obtenus pour la Géométrie réglée dans sa *Théorie des vis*.

$\omega_2, \ldots, \omega_8$, analogues aux coordonnées kleinéennes d'une droite, et liées par la relation

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_8^2 = 0.$$

Enfin il semble très possible que la Géométrie des feuillets fournisse l'occasion de trouver de nouvelles applications géométriques de la théorie des fonctions abéliennes à plus de deux variables.

[H9d]
APPLICATION DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES AUX SURFACES DONT LES IMAGES SPHÉRIQUES DES LIGNES DE COURBURE SONT DES LOXODROMIES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

---

1. Une surface (S) étant considérée, par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$, comme enveloppe du plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi,$$

l'équation différentielle des images sphériques (dans la représentation de Gauss) des lignes de courbure de (S) est

$$(1) \qquad d\varphi^2 - \cos^2\varphi \, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'} d\varphi \, d\psi = 0;$$

en désignant par p, q, r, s, t les dérivées de la fonction ϖ de φ et de ψ, les déterminants D, D', D'' de Gauss ont pour expressions, à un même facteur près,

$$D = \varpi + r,$$
$$D' = q \operatorname{tang}\varphi + s,$$
$$D'' = \varpi \cos^2\varphi + t - p \cos\varphi \sin\varphi.$$

L'équation (1) met en évidence deux classes de surfaces : celle des surfaces moulures $D' = 0$, pour lesquelles les lignes de courbure ont pour images sphériques les parallèles et les méridiens de la sphère, et celle des surfaces

$$D'' = D\cos^2\varphi = 0,$$

surfaces qui sont les intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(2) \qquad t = \cos\varphi(p\sin\varphi + r\cos\varphi);$$

les images sphériques des lignes de courbure de ces dernières surfaces sont des loxodromies inclinées de 45° sur les méridiens

$$(3) \qquad \psi = \operatorname{Log}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \text{const.}$$

2. Soit τ l'argument des fonctions hyperboliques liées aux fonctions circulaires de l'arc φ par les relations de M. Laisant

$$\sin\varphi = \operatorname{th}\tau, \qquad \cos\varphi\operatorname{ch}\tau = 1, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{sh}\tau;$$

la transformation

$$x = \psi, \qquad \cos\varphi\operatorname{ch}\tau = 1, \qquad V = m(1 + e^{-2\tau})$$

transforme l'équation (2) en l'équation des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2} = 2\frac{\partial V}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies (3) est donc ramenée à l'intégration de l'équation des télégraphistes.

On peut prendre pour intégrale celle que donne

M. Poincaré :

$$\varpi = \cos\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_1 \cos(z\sqrt{\lambda^2 - 1}) - A_2 \frac{\sin(z\sqrt{\lambda^2 - 1})}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right] e^{i\lambda\psi} d\lambda,$$

A_1 et A_2 désignant deux fonctions arbitraires de λ.

3. Les intégrales particulières connues de l'équation des télégraphistes donnent les surfaces

$$\varpi = a\cos\varphi\cos\psi + b\cos\varphi\sin\psi + c\sin\varphi,$$
$$\varpi = \psi,$$
$$\varpi = \psi\sin\varphi,$$
$$\varpi = \psi^2 + \sin\varphi \operatorname{Log}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad \ldots,$$

et celle qu'on en déduit par combinaison linéaire ; à cette dernière solution, on pourra appliquer la méthode de la variation des constantes.

La première solution représente un point.

La solution $\varpi = \psi\sin\varphi$ représente l'*hélicoïde gauche à plan directeur*, seule surface minima dont les lignes de courbure ont les loxodromies (3) pour images sphériques.

La solution $\varpi = \psi$ est transformée de la précédente par la transformation de Bonnet, transformation qui laisse invariante l'équation (2) (sans donner d'ailleurs aucun résultat intéressant pour l'équation des télégraphistes) ; cette surface est donc une surface admettant le plan Oxy pour surface moyenne. Cette surface est aussi une *surface de M. Appell*, admettant le point O pour développée moyenne ; la projection de O sur chaque normale se fait donc au milieu du segment ayant pour extrémités les centres de courbure principaux, et cette projection est dans le plan Oxy : c'est à ce titre que je considérerai cette surface dans un prochain Mémoire sur les *Conséquences de deux théo-*

rèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques (¹).

Pour terminer, je ferai observer qu'on peut appliquer, aux surfaces dont les lignes de courbure ont des loxodromies pour images sphériques, la méthode exposée par M. Goursat dans ses *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*. M. Goursat traite, en particulier, le cas où les images sphériques sont des cercles et intègre l'équation correspondante

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

dans le cas actuel des loxodromies (3), l'équation est

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

elle ne s'intègre pas par la méthode de Monge; il est aisé de la transformer en des équations de Laplace à invariants égaux et constants, par exemple en l'équation

$$s = z.$$

[N¹1i]

CONSÉQUENCES DE DEUX THÉORÈMES DE M. BRICARD CONCERNANT LES TANGENTES COMMUNES A DEUX QUADRIQUES;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. On doit à M. R. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1908) le théorème suivant : *Si une droite varie en touchant*

(¹) *Voir* le présent Numéro, p. 24.

constamment deux quadriques homofocales, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques homofocales aux deux premières forment un faisceau de grandeur constante.

Considérons le complexe des arêtes des dièdres de grandeur constante donnée dont les faces touchent une quadrique donnée H_0; soit (γ) une courbe plane du complexe; toute tangente δ de (γ) est touchée par deux quadriques H_1, H_2 du système homofocal H auquel appartient la quadrique H_0. Puisque δ est un rayon du complexe, la congruence des tangentes communes à H_1 et à H_2 appartient au complexe, d'après le théorème de M. Bricard.

Lorsque δ varie en touchant (γ), cette congruence varie en dépendant d'un paramètre et engendre le complexe. Cette congruence, d'autre part, est une congruence de normales (Chasles) à une famille de surfaces dont on connaît l'équation (Liouville). Une famille à un paramètre de congruences de normales appartenant au complexe étant connue, il résulte d'un théorème fondamental de M. Darboux que toutes les congruences de normales appartenant au complexe sont connues; toutes les surfaces dont les normales appartiennent au complexe sont elles aussi connues et leur équation générale se déduit de l'équation donnée par Liouville, sans introduction de quadratures.

Il résulte donc du théorème de M. Bricard que *le problème de Transon est résolu pour le complexe des arêtes des dièdres de grandeur constante donnée dont les faces touchent une quadrique donnée.*

Le problème est équivalent à celui des géodésiques d'une quadrique générale.

2. Considérons le cas particulier du complexe de Painvin attaché à une quadrique à centre.

Les axes coordonnés $Oxyz$ sont rectangulaires; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 désignent les coordonnées plückériennes d'une droite, les trois premières étant les cosinus directeurs.

Le complexe quadratique spécial attaché à la quadrique à centre H_0 d'équation tangentielle

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 1$$

a pour équation

$$Ap_4^2 + Bp_5^2 + Cp_6^2 - BCp_1^2 - CAp_2^2 - ABp_3^2 = 0;$$

par simple soustraction des premiers membres des équations des complexes quadratiques spéciaux attachés aux deux quadriques H_1 et H_2 du faisceau homofocal

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} - 1 = 0,$$

qui correspondent aux deux valeurs symétriques $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$ du paramètre, on vérifie que la congruence commune aux complexes quadratiques spéciaux attachés à H_1 et à H_2 appartient au complexe de Painvin

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - (B+C)p_1^2 - (C+A)p_2^2 - (A+B)p_3^2 = 0,$$

attaché à la quadrique H_0. Introduisons les coordonnées de Bonnet par les formules que j'ai données à la page 254 des *Nouvelles Annales* de 1909. Les surfaces dont les normales appartiennent au complexe de Painvin sont, en coordonnées de Bonnet, intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u}\frac{\partial \varpi}{\partial v}(1-uv)^2$$
$$= (B+C)(u+v)^2 + (C+A)(u-v)^2 + (A+B)(uv-1)^2,$$

qu'on peut intégrer, d'après ce qui précède, en introduisant l'intégrale de Liouville.

3. Une première généralisation du complexe de Painvin est le complexe d'équation

$$p_4^2 - p_5^2 - p_6^2 = f(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$$

des droites dont la distance à un point fixe est une fonction donnée des cosinus directeurs : ce complexe est un des complexes invariants dans la transformation de droites que j'ai étudiée dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 255). Pour un tel complexe, le problème de Transon est équivalent à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u} \frac{\partial \varpi}{\partial v} = F(u, v),$$

et, par conséquent, à la détermination des géodésiques de la surface la plus générale rapportée à ses lignes de longueur nulle.

Le problème de Transon pour le complexe de Painvin étant résolu, il en est donc de même du problème des géodésiques pour les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{a(x+y)^2 - b(x-y)^2 - c(xy-1)^2}{(1+xy)^2} dx\,dy.$$

Il en résulte encore qu'on peut déterminer et ramener à la détermination des géodésiques d'une quadrique à centre le mouvement du centre de gravité d'un corps solide quelconque à point fixe O, chaque élément du corps étant attiré ou repoussé par trois plans rectangulaires (ou par trois axes rectangulaires) passant par O proportionnellement aux distances de cet élément aux plans (ou aux axes).

4. Dans le cas particulier où le complexe général du n° 3 est de révolution autour de Oz, F est une fonction quelconque du produit uv ; les équations différen-

tielles des caractéristiques présentent alors la combinaison intégrable

$$d\left(\frac{\partial\varpi}{\partial u}u - \frac{\partial\varpi}{\partial v}v\right) = 0,$$

dont se déduit une intégrale complète

$$\varpi = a \operatorname{Log}\frac{u}{v} + \int \frac{\sqrt{uv\,F + a^2}}{uv}\,d(uv) + \text{const.}$$

Il est encore commode, pour ce même cas, de considérer les surfaces dont les normales appartiennent au complexe comme enveloppes du plan

$$x\cos\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\sin\psi - z\sin\varphi = \varpi;$$

l'équation à intégrer est à variables séparées (propriété des complexes de révolution) :

$$\left[\Phi(\varphi) - \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\right)^2\right]\cos^2\varphi = \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\right)^2;$$

on retrouve ainsi l'intégrale complète précédente.

Les considérations relatives aux complexes de Painvin de révolution s'appliquent au cas particulier intéressant, du moins au point de vue historique, du complexe spécial des tangentes à une sphère de centre O. L'intégrale complète est alors

$$\frac{\varpi}{R} = a\psi + \operatorname{arc\,tang} t - a \operatorname{arc\,tang}(at) - b;$$

R représente le rayon de la sphère; a et b sont deux constantes, et l'on a posé

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1 - a^2 t}}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

5. Une autre généralisation du complexe de Painvin attaché à une quadrique à centre est le complexe des

sécantes harmoniques de deux sphères (Loria et Segre). Prenant pour axe Oz la ligne des centres et pour plan Oxy le plan radical, l'équation

$$\begin{aligned} &p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - c(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ &\quad + (a + b)(p_1 p_5 - p_2 p_4) - ab p_3^2 = 0 \end{aligned}$$

représente le complexe des droites qui coupent harmoniquement les deux sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az - c = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2bz - c = 0.$$

L'équation des surfaces dont les normales appartiennent au complexe est

$$\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \psi}\right)^2 - (a + b)\sin\varphi \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} - ab\sin^2\varphi - c = 0;$$

les variables se séparent et, en posant

$$\begin{gathered} u = \sin\varphi, \qquad R = A_0 u^4 + A_1 u^2 + A_2, \\ 4A_0 = (a - b)^2, \qquad -2A_1 = a^2 + b^2 - 2c, \\ A_2 = \frac{(a + b)^2}{4} + c - A^2, \end{gathered}$$

on a l'intégrale complète, dépendant d'intégrales elliptiques des trois espèces,

$$\begin{aligned} \varpi = A\psi + \frac{a - b}{2} u + B + (A_0 + A_1)\int \frac{du}{\sqrt{R}} \\ + A_0 \int \frac{u^2\, du}{\sqrt{R}} + (A_0 + A_1 + A_2)\int \frac{du}{(u^2 - 1)\sqrt{R}}; \end{aligned}$$

A et B sont des constantes.

6. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le complexe de Painvin était attaché à une quadrique à centre. Considérons maintenant le cas des complexes de Painvin attachés aux paraboloïdes, complexes qui interviennent dans la théorie des axes

d'inertie des systèmes matériels de masse totale nulle.

Étant donné un paraboloïde

$$Au^2 + Bv^2 - 2w + \lambda(u^2 - v^2 + w^2) = 0,$$

l'équation du complexe quadratique spécial attaché à ce paraboloïde est

$$\begin{aligned} &p_6^2 - 2(A + \lambda)p_2 p_4 - 2(B + \lambda)p_1 p_5 \\ &\quad - \lambda(B - \lambda)p_1^2 - \lambda(A + \lambda)p_2^2 - (A + \lambda)(B + \lambda)p_3^2 = 0; \end{aligned}$$

la congruence commune aux deux complexes spéciaux attachés aux paraboloïdes de paramètres λ et $-\lambda$ du faisceau homofocal appartient au complexe de Painvin

$$2(p_2 p_4 - p_1 p_5) + B p_1^2 - A p_2^2 - (A + B)p_3^2 = 0,$$

attaché au paraboloïde de paramètre nul : le théorème de M. Bricard est ainsi vérifié dans ce nouveau cas particulier.

Ψ désignant une fonction arbitraire de ψ, l'équation générale des surfaces dont les normales appartiennent au complexe est

$$\begin{aligned} 2\varpi = \sin\varphi(A\cos^2\psi + B\sin^2\psi) \\ - (A + B)\operatorname{Log}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \Psi. \end{aligned}$$

Le terme logarithmique disparaît dans le cas où le paraboloïde est équilatère : l'équation générale des surfaces dont les normales appartiennent au complexe de Ball (*The theory of screws*, p. 21) est donc

$$2\varpi = A\sin\varphi\cos 2\psi - \Psi.$$

7. Dans les *Nouvelles Annales* de 1909, revenant sur son travail de 1908, M. Bricard a donné un nouveau théorème *Sur les quadriques circonscrites à deux sphères*. De ce second théorème, en se bornant

aux complexes de Painvin, il résulte que *la congruence des tangentes communes à deux sphères* (S) *et* (S′) *appartient au complexe de Painvin attaché à la quadrique dégénérée tangentiellement en les deux centres de similitude* σ *et* σ' *des deux sphères.*

Maintenons fixes les centres S et S′ des deux sphères et constant le rapport des rayons : σ et σ' sont alors fixes, et la congruence engendre le complexe. En d'autres termes, il résulte du second théorème de M. Bricard que *le complexe des droites dont le rapport des distances à deux points est constant est identique au complexe de Painvin attaché à une quadrique dégénérée tangentiellement en deux points.* Nous retrouvons ainsi un théorème du Mémoire de M. Léry *Sur les courbes pour lesquelles le rapport des distances de leurs tangentes à deux points fixes est constant* (*Nouvelles Annales*, 1902).

Ce complexe est une dégénérescence du complexe de Painvin attaché à une quadrique de révolution, et, à ce titre, il est une dégénérescence du complexe des sécantes harmoniques de deux sphères : les deux sphères sont alors tangentes.

Voici de nouvelles propriétés de ce complexe; la première est immédiate; quant à la seconde, qui constitue une extension d'un théorème de M. Darboux, j'en donnerai la démonstration ultérieurement.

Si un quadrilatère articulé gauche ABCD *à diagonales* AC *et* BD *orthogonales se déforme, deux de ses sommets consécutifs* A *et* B *restant fixes, la perpendiculaire commune aux diagonales engendre le complexe de Painvin pour la quadrique formée par les points* A *et* B.

De même, *si un quadrilatère articulé gauche* ABCD, *provenant de la déformation d'un quadri-*

latère plan circonscriptible à un cercle, se déforme, deux de ses sommets consécutifs A *et* B *restant fixes, la droite lieu des centres des sphères inscrites au quadrilatère gauche* ABCD *engendre un complexe de Painvin attaché à une quadrique dégénérée en deux points. Ces deux points sont les extrémités du segment qui divise harmoniquement les deux diagonales* AC *et* BD *du quadrilatère quand il est amené dans la position pour laquelle il a ses quatre sommets en ligne droite.*

Réciproquement tout complexe de Painvin pour une quadrique dégénérée en deux points est susceptible d'une telle génération.

8. Dans le cas où les deux sphères (S) et (S′) qui figurent dans l'énoncé du théorème de M. Bricard sont égales, le complexe est le *complexe des droites équidistantes de deux points.*

Les côtés opposés AD et BC du quadrilatère articulé circonscriptible à une infinité de sphères sont alors égaux.

Le complexe Ω *des droites équidistantes de deux points* A, B *est identique au complexe des droites sur lesquelles les projections d'un point fixe* (milieu O de AB) *sont dans un plan.* Il appartient à ce titre à une classe importante de complexes admettant une surface podaire que j'aurai l'occasion d'étudier dans un Mémoire *Sur les surfaces de M. Appell.*

Le complexe Ω est le même si l'on remplace A et B par les extrémités d'un autre segment de même direction et de même milieu.

Le complexe Ω est celui des sécantes d'une sphère ayant leurs milieux dans un plan diamétral donné : c'est bien là une dégénérescence du complexe de Battaglini.

En prenant O pour origine et AB sur Oz, l'équation du complexe Ω est

$$p_2 p_4 - p_1 p_5 = 0;$$

le complexe est donc un cas particulier (ellipsoïde de révolution) du complexe

$$a^2 p_2 p_4 - b^2 p_1 p_5 = 0$$

des cordes de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

ayant leurs milieux dans le plan principal Oxy (Amigues); c'est encore là une nouvelle dégénérescence du complexe de Battaglini.

Le complexe Ω, étant un complexe de Battaglini et étant son propre polaire réciproque par rapport à toute sphère de centre O, est un complexe d'Aschieri.

Le cône du complexe Ω ayant pour sommet un point quelconque M de l'espace admet pour sections cycliques les plans normaux à la génératrice OM et à la génératrice parallèle à Oz.

La courbe du complexe située dans un plan quelconque est une parabole d'éléments immédiatement connus.

La surface du complexe correspondant à une droite quelconque de Oxy est un cylindre parabolique.

Je terminerai l'énumération des propriétés du complexe Ω en rappelant que je l'ai considéré à la page 256 des *Nouvelles Annales* de 1909 comme transformé du complexe linéaire spécial. Ce même complexe Ω a été étudié par Eck dans son Mémoire : *Ueber die Vertheilung der Axen von Rotation Flächen 2 grades*

welche durch gegebene Punckte gehen (Dissertation von Münster, 1890) et par Sturm à la page 364 du Tome I de son Ouvrage : *Die gebilde* I *und* II *Grades der Liniengeometrie*.

9. Tandis que le premier théorème de M. Bricard conduit à la solution du problème de Transon pour le complexe de Painvin général, le second théorème ne permet pas de résoudre ce même problème pour le complexe de Painvin dégénéré : la congruence des tangentes communes à deux sphères n'est pas une congruence de normales. Mais, ce complexe étant de révolution, le problème est résoluble *a priori*.

Je m'occuperai uniquement du complexe Ω des droites équidistantes de deux points : on connaît alors une famille de surfaces non parallèles (cylindres de révolution autour de droites du plan Oxy issues de O) dont les normales appartiennent au complexe. Dès lors le problème est résoluble sans quadrature, d'après le théorème fondamental de M. Darboux.

Effectuons une transformation de contact : prenons les podaires par rapport à O. La podaire d'un cylindre d'axe passant par O et situé dans Oxy est un cercle de centre O et de diamètre Oz. *La surface* (Σ) *la plus générale, dont les normales appartiennent au complexe* Ω, *est antipodaire par rapport à* O *de la surface cerclée la plus générale* (S) *engendrée par un cercle de centre* O *et de diamètre* Oz. En d'autres termes, (S) est la transformée apsidale par rapport à O d'une courbe générale du plan Oxy.

Ce théorème est d'ailleurs un cas particulier du théorème suivant : *La surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe des droites sur lesquelles le point fixe* O *se projette en les points*

d'un cône de sommet O est antipodaire par rapport à O de la surface transformée apsidale par rapport à O d'une courbe quelconque tracée sur le cône.

10. Signalons quelques propriétés des surfaces (Σ) et (S).

La surface (Σ) la plus générale est enveloppe du plan

$$x\cos\varphi\cos\psi - y\cos\varphi\sin\psi + z\sin\varphi = \varpi,$$

ϖ n'étant fonction que de ψ.

Les lignes de niveau de (Σ) et celles de sa podaire (S) se correspondent : en général, la cote d'un point d'une surface définie en coordonnées φ et ψ est

$$z = \varpi\sin\varphi + \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\cos\varphi;$$

pour une surface (Σ), z se réduit à $\varpi\sin\varphi$, c'est-à-dire à la cote du point correspondant de la podaire (S).

Sur la podaire (S), les cercles (ψ) et les courbes (tracées sur des cônes de révolution autour de Oz) correspondant aux courbes (φ) de (Σ) sont orthogonaux. Il est évident *a priori* que les courbes trajectoires orthogonales sur (S) des cercles générateurs sont déterminables, puisque l'axe Oz et la trace de (S) sur Oxy sont solutions doubles de l'équation de Riccati dont dépendent ces trajectoires. Il résulte de l'expression de l'élément linéaire de la surface podaire d'une surface quelconque

$$ds_1^2 = \left[\varpi^2 + \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\right)^2\right]d\varphi^2 + 2\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\,d\varphi\,d\psi + \left[\varpi^2\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\psi}\right)^2\right]d\psi^2,$$

que ces trajectoires orthogonales sont les courbes (φ) :

c'est là une propriété caractéristique des surfaces (S) et des surfaces de révolution autour de Oz. *Les projections sur* Oxy *des trajectoires orthogonales des cercles générateurs de la surface* (S) *sont homothétiques par rapport à* O *de la trace de* (S) *sur* Oxy. Cette trace n'est autre d'ailleurs que la courbe transformée apsidale de (S), après rotation d'un angle droit autour de Oz [1].

11. Après avoir indiqué ces quelques propriétés générales, je donnerai quelques exemples de surfaces cerclées (S).

I. Une surface (S) classique (qui donna d'ailleurs lieu à diverses questions des *Nouvelles Annales*) est la surface engendrée par les sections circulaires diamétrales d'une famille d'ellipsoïdes homofocaux.

D'une façon générale, toute surface (S) peut être envisagée comme lieu des sections circulaires diamétrales d'une famille à un paramètre de quadriques

---

[1] Nous venons de déterminer les surfaces telles que les courbes (φ) et (ψ) sont orthogonales sur la podaire. Signalons incidemment que *les surfaces* (II) *telles que les courbes* (φ) *et* (ψ) *soient conjuguées sur la podaire* sont intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\varpi\left(\frac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi\,\partial\psi} + \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\operatorname{tang}\varphi\right) - 2\,\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = 0.$$

La transformation $\varpi\varpi' = 1$ (du groupe que j'ai considéré à la page 311 des *Nouvelles Annales*, de 1909) *transforme ces surfaces* (II) *en les surfaces moulures*

$$\frac{\partial^2\varpi'}{\partial\varphi\,\partial\psi} - \frac{\partial\varpi'}{\partial\psi}\operatorname{tang}\varphi = 0;$$

on a donc

$$\varpi(\Phi + \Psi\cos\varphi) = 1,$$

Φ désignant une fonction arbitraire de φ, et Ψ une fonction arbitraire de ψ.

coaxiales; lorsque c'est la famille homofocale

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0 \qquad (a^2>c^2>b^2),$$

la surface (S) a pour équation en coordonnées elliptiques

$$\lambda_2+\lambda_3=-(a^2+b^2),$$

et en coordonnées cartésiennes

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{c^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-c^2}\right)=x^2+y^2;$$

c'est une dégénérescence de la surface des ondes de Fresnel; elle est transformée apsidale, par rapport à son centre, de l'hyperbole focale du faisceau.

II. La surface (S) transformée apsidale de la spirale d'Archimède de pôle O est la podaire de la surface (Σ) d'équation

$$\varpi=a\psi;$$

cette surface (Σ) est une surface de M. Appell que j'ai déjà considérée dans une Note sur l'*Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies* (¹).

III. La surface (S) d'équation

$$(x^2+y^2+z^2)x^2=c^2(x^2+y^2)$$

est une dégénérescence de la surface des ondes de Fresnel; elle est transformée apsidale d'une droite. Elle est engendrée par des courbes qui se projettent sur Oyz suivant des ellipses homofocales.

Si le plan Oyz est supposé horizontal, les lignes de plus grande pente de cette surface sont les cercles gé-

(¹) *Nouvelles Annales*, même Tome, p. 24.

nérateurs. On connaît donc un réseau orthogonal tracé sur cette surface et formé de deux systèmes de coniques.

IV. La surface (S) d'équation

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 y^2 = c^4 (x^2 - y^2)$$

est engendrée par des cercles qui se projettent sur Oyz suivant des ellipses d'aire constante; elle est transformée apsidale de la courbe d'équation polaire

$$r^2 \cos\theta = c^2;$$

les trajectoires orthogonales des cercles générateurs se projettent orthogonalement sur Oxy suivant les courbes

$$r^2 \sin\theta = \text{const.};$$

ces courbes sont inverses d'une courbe remarquable qu'on rencontre fréquemment : projection des asymptotiques du conoïde de Wallis; hodographe du pendule simple, dans un cas particulier; méridienne du solide de moindre attraction; méridiennes des surfaces équipotentielles des doublets, etc. [1].

V. Comme dernier exemple de surface (S), je signalerai le suivant : si quatre cercles de centres fixes, de rayons variables, les différences des rayons deux à deux étant constantes, sont assujettis à être quatre cercles d'une même sphère (sphère qui dès lors engendre un faisceau), chacun de ces quatre cercles engendre une surface (S) particulière.

12. Le complexe Ω appartient à *une classe impor-*

---

[1] On trouvera les courbes $r^2 = b^2 \cos\theta$ et leurs trajectoires orthogonales $r = a \sin^2\theta$ représentées à la figure 37 (p. 75) du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. H. Bouasse.

tante de complexes pour lesquels le problème de Transon se résout par trois quadratures.

Considérons un complexe dont l'équation est linéaire et homogène en p_4, p_5, p_6, les coefficients étant trois fonctions homogènes et de même degré de $\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$ et de chacune des trois coordonnées respectives p_1, p_2, p_3; en d'autres termes, cette équation est, en tenant compte de la relation $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$,

$$P_1 p_4 + P_2 p_5 + P_3 p_6 = 0,$$

P_1, P_2, P_3 étant trois fonctions données respectivement de p_1, de p_2, de p_3.

L'équation linéaire dont dépendent, en coordonnées de Bonnet, les surfaces dont les normales appartiennent au complexe peut être mise sous la forme

$$\sum_1^3 P_i \frac{D(\varpi, p_i)}{D(u, v)} = 0$$

ou

$$\frac{D(\varpi, V)}{D(u, v)} = 0,$$

en posant

$$V = \int P_1\, dp_1 + \int P_2\, dp_2 + \int P_3\, dp_3;$$

toutes les surfaces cherchées sont données, par conséquent, par la formule

$$H(\varpi) = \int P_1\, dp_1 + \int P_2\, dp_2 + \int P_3\, dp_3,$$

dans laquelle H est une fonction arbitraire de ϖ.

En prenant pour P_1, P_2, P_3 trois dérivées de fonctions connues, le problème se résout sans quadrature. Un premier exemple est celui du complexe Ω,

$$P_1 = \frac{1}{p_1}, \qquad P_2 = -\frac{1}{p_2}, \qquad P_3 = 0, \qquad \varpi = f\left(\frac{u}{v}\right),$$

et du complexe plus général (n° 8) des cordes d'un ellipsoïde dont les milieux sont dans un plan principal

$$P_1 = \frac{a^2}{p_1}, \qquad P_2 = -\frac{b^2}{p_2}, \qquad P_3 = 0, \qquad \varpi = f\left(\frac{p_1^{a^2}}{p_2^{b^2}}\right);$$

cette classe importante de complexes contient le complexe des droites rencontrant une droite issue de O, le complexe tétraédral, le complexe polaire réciproque, par rapport à une sphère de centre O, du complexe des génératrices des quadriques homofocales et homothétiques, etc.

P.-S. — Dans cette Note, je me suis préoccupé d'exposer quelques conséquences des deux théorèmes si simples et si curieux de M. Bricard. Je publierai prochainement un ensemble de recherches sur le problème de Transon ; je montrerai comment un théorème de M. Darboux, théorème dont Sophus Lie a indiqué des applications, conduit à diverses méthodes nouvelles pour déterminer les congruences de normales appartenant à un complexe donné.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Lille.

I. Question de cours. — 1° *Démontrer que le produit*

$$z \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{e^{\frac{z}{n}}}$$

est convergent pour toute valeur de z.

2° *Énoncer et démontrer les propriétés de la fonction*

$s(z)$ définie par ce produit, ainsi que de la fonction

$$\lambda(z) = \frac{s'(z)}{s(z)}.$$

3° *Démontrer que l'on a* $\sin \pi z = e^{G(z)} s(z)$, $G(z)$ *étant une fonction entière. Déterminer cette fonction* $G(z)$.

4° *Relations entre les fonctions* $\lambda'(z)$ *et* $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$. *En déduire la somme des séries de la forme*

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \ldots,$$

p étant un entier positif.

II. Problème. — *On considère l'équation différentielle du deuxième ordre*

$$(1) \qquad y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} + (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0.$$

1° *Démontrer qu'elle admet comme intégrale générale un trinome du deuxième degré dont deux coefficients sont arbitraires.*

2° *Démontrer qu'elle admet en outre une solution singulière, dépendant d'une constante arbitraire, et satisfaisant à une équation du premier ordre*

$$(2) \qquad F(x, y, y') = 0.$$

3° *Former l'équation* (2); *l'intégrer; chercher si elle admet elle-même une solution singulière, satisfaisant ou non à l'équation* (1).

(Juillet 1909.)

Nancy.

Épreuve écrite. — I. *Définir un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires et homogènes. Établir ses propriétés immédiates. Systèmes complets jacobiens. Démontrer qu'un système complet de m équations à $m + n$ variables indépendantes admet n intégrales distinctes.*

II. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du*

second ordre

$$(rx+p)(t+1)-s(sx-q-y)=0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système*

$$2x_2x_4^2p_1-x_5^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0,$$
$$2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$$
$$x_2x_4^2p_3-x_1x_3x_4p_4+x_1x_3x_5p_5=0.$$

(Juin 1908.)

Toulouse.

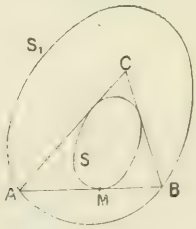
ÉPREUVE ÉCRITE. — I. 1° *Soient deux coniques* S *et* S_1 *ayant pour équations trilinéaires respectives*

$$(S)\qquad x^2+y^2+z^2=0,$$
$$(S_1)\qquad ax^2+by^2+cz^2=0.$$

On considère un triangle ABC *circonscrit à* S *ayant deux sommets* A *et* B *sur* S_1. *Exprimer les coordonnées du point* C *au moyen de celles du point de contact* M *de* AB *avec* S.

2° *En se servant des formules précédentes, trouver la relation qui existe entre les racines* a, b, c *de l'équation en* λ *des deux coniques, s'il existe un triangle inscrit dans* S_1 *et circonscrit à* S. *Si cette relation est vérifiée, montrer qu'il existe alors une infinité de triangles ayant*

Fig. 1.



la propriété précédente. Trouver la forme de la relation considérée quand on introduit les invariants simultanés Θ, Δ, Θ_1, Δ_1 *des deux coniques.*

3° *Appliquer à une ellipse* S *et à un cercle* S_1 *ayant son centre sur le grand axe. Montrer qu'il y a deux cercles de centre donné* ω *sur le grand axe et répondant à la question. Établir que,* ω *se déplaçant sur le grand axe, l'enveloppe de ces deux cercles est un système de deux cercles.*

II. U_1, U_2, U_3, U_4 *désignant quatre fonctions de la seule variable* u *et* V_1, V_2, V_3, V_4 *quatre fonctions de la seule variable* v, *on considère la surface* S *définie par les équations*

$$(1)\quad x = \frac{U_1 - V_1}{U_4 - V_4}, \qquad y = \frac{U_2 - V_2}{U_4 - V_4}, \qquad z = \frac{U_3 - V_3}{U_4 - V_4},$$

qui expriment en fonction de deux paramètres u *et* v *les coordonnées cartésiennes* x, y, z *d'un point de* S.

1° *Établir que les deux familles de courbes* (u) *et* (v) *sont conjuguées.*

2° *Indiquer quelle est la nature de la développable circonscrite à* S *le long d'une des courbes* (u) *ou* (v); *examiner le cas dans lequel l'une des fonctions* U_4, V_4 *se réduit à une constante et celui dans lequel ces deux fonctions sont constantes.*

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de* S *dans le cas particulier où les formules* (1) *sont les suivantes :*

$$x = u^2, \qquad y = v^2, \qquad z = u^3 - v^3.$$

Épreuve pratique. — *On considère la fonction* u *de* z *définie par l'équation*

$$u^3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}(1 - z)u + 1 - z^2 = 0.$$

Soient u_1, u_2, u_3 *les racines de cette équation pour* $z = 0$; u_1 *est réelle et négative; le coefficient de* i *dans* u_2 *est positif, dans* u_3 *il est négatif.*

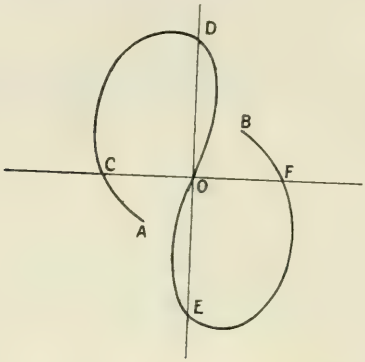
1° *Trouver les points de ramification. Indiquer quelles sont les déterminations qui se permutent autour de chacun d'eux. (On remarquera que l'équation n'a jamais de racine réelle pour* z *purement imaginaire.)*

2° *Trouver, dans le voisinage du point* $z = -1$, *les trois*

premiers termes du développement des trois racines suivant les puissances fractionnaires de $z+1$.

3° *Tracer des coupures qui rendent uniforme chacune*

Fig. 2.



des trois déterminations ; A, C, D, E, F, B *désignant les points dont les coordonnées sont respectivement*

$$(-1, -1), \quad (-2, 0), \quad (0, 3), \quad (0, -3),$$
$$(2, 0), \quad (+1, -1).$$

on part du point A *avec la détermination* u_1, *en suivant le chemin indiqué ci-contre* ACDOEFB ; *avec quelle détermination arrive-t-on en* B?

(Juillet 1908.)

Épreuve écrite. — I. *Indiquer les diverses valeurs que peut prendre l'intégrale*

$$\int_0^i \frac{dz}{(z-3)\sqrt{1-z^2}}$$

quand on va dans le plan complexe du point $z=0$ *au point* $z=i$ *en suivant un chemin arbitraire.*

II. *On considère la surface* S *enveloppe des plans*

$$2\alpha x + 2\beta y - (1-\alpha^2-\beta^2)z = 2f(\alpha, \beta)$$

qui dépendent des deux paramètres α *et* β.

1° *Trouver l'expression la plus générale de* $f(\alpha, \beta)$ *de manière que les lignes* $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ *soient les lignes de courbure de la surface; ce sont alors des courbes planes.*

2° *Déterminer tous les cas où ces lignes de courbure sont circulaires.*

3° *Parmi ces dernières surfaces il en existe une dont les rayons de courbure sont en chaque point égaux et de signes contraires. Trouver ses lignes asymptotiques.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On coupe l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

par un plan; déterminer les coordonnées du centre de gravité de l'un des volumes limités par le plan et l'ellipsoïde. En déduire les coordonnées du centre de gravité du volume limité par l'ellipsoïde et deux plans quelconques n'ayant aucun point commun à l'intérieur de l'ellipsoïde.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère la surface* Σ, *enveloppe du plan* P,

$$2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)z + (\beta^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2 + 3) = 0,$$

où α *et* β *sont des paramètres.*

1° *Calculer les coordonnées du point de contact* M *de* P *avec son enveloppe et l'élément linéaire de la surface.*

2° *Déterminer les lignes de courbure de* Σ *(ces lignes sont planes) et aussi ses lignes asymptotiques. Que sont ces lignes?*

3° *Les plans des deux lignes de courbure qui passent en* M *coupent les plans coordonnés* yOz *et* xOz *suivant deux droites* D *et* Δ *dont on demande les trajectoires orthogonales.*

4° *Montrer que les droites perpendiculaires à* P *qui s'appuient sur* D *et* Δ *engendrent une congruence de normales : quelles sont les surfaces normales à ces droites?*

II. *Étant donnés trois points* P, Q, R *sur une cubique plane, déterminer un triangle* ABC *dont les sommets*

soient sur la courbe et dont les côtés passent respectivement par les points donnés P, Q, R ; *cas où les trois points* P, Q, R *sont en ligne droite.*

Épreuve pratique. — I. *On envisage la fonction elliptique $f(u)$ admettant les mêmes périodes données et les mêmes pôles que la fonction pu et qui, dans le voisinage de $u = 0$, se développe par la formule*

$$f(u) = \frac{1}{u^6} - \frac{1}{u^4} + \left(1 - \frac{3}{20} g_2\right) \frac{1}{u^2} + \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n u^n,$$

dans laquelle les coefficients A_n ont des valeurs constantes dont la première A_0 est supposée donnée et où g_2 désigne la constante qui figure dans le développement connu

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots$$

de pu.

1° *Déterminer la décomposition de $f(u)$ en éléments simples.*

2° *Exprimer la fonction $f(u)$ au moyen de la fonction pu.*

3° *Déterminer la fonction primitive et les dérivées successives de $f(u)$.*

II. *Étudier, dans le voisinage de l'origine, la courbe représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation*

$$xy^2(y - x)^2 - 2x^2(y^4 - x^4) - 3y^7 + x^8 = 0.$$

(Juillet 1909.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Besançon.

Épreuve écrite. — I. *Mouvement d'un seul corps céleste autour du Soleil. — Cas de l'orbite elliptique, position du corps à l'instant t.*

II. *Aberration annuelle. Formules usuelles pour les coordonnées équatoriales.*

Épreuve pratique. — 1° *Calculer d'heure en heure les ascensions droites de la Lune à l'aide des données suivantes pour les* 29-30 *juin* 1909 :

h	h m s
0	15. 6.30,7
4	15.14.36,5
8	15.22.47,8
12	15.31. 4,5
16	15.39.27,0
20	15.47.55,3
24	15.56.29,5
28	16. 5. 9,28

(Juillet 1909.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Montrer comment les lois expérimentales du mouvement des planètes conduisent à la loi d'attraction newtonienne et comment cette loi est nécessaire pour expliquer le mouvement des satellites autour des planètes ; vérification dans le cas de la Lune.*

Indiquer, sans démonstration, les raisons qui permettent d'étendre cette loi à tous les systèmes stellaires.

Épreuve pratique. — *Connaissant à deux époques différentes les longitudes l_1 et l_2 d'une planète et les latitudes λ_1 et λ_2, calculer la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de son orbite.*

$$l_1 = 75^\circ 25' 32'', \qquad l_2 = 104^\circ 10' 17'',$$
$$\lambda_1 = 8^\circ\ 6'\ 7'', \qquad \lambda_2 = 3^\circ 35' 41''.$$

(Juin 1909.)

Caen.

Épreuve écrite. — *Définition et principales propriétés des fonctions de Bessel.*

Démontrer, en particulier, la formule

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Épreuve pratique. — *Sachant qu'une étoile reste un temps sidéral* T *au-dessus de l'horizon d'un lieu, déterminer la déclinaison de cette étoile.*

La latitude φ *du lieu est donnée.*

Application numérique :

$$T = 6^h 38^m 15^s,$$

$$\varphi = 43^\circ 51' 33''.$$

(Juillet 1909.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Résoudre, par application de la méthode des moindres carrés, le système*

$$a_p x + b_p y = c_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

et déterminer les erreurs moyennes des valeurs calculées des inconnues.

II. *Erreurs d'excentricité dans la mesure des angles au moyen de cercles divisés; emploi de verniers multiples.*

Épreuve pratique. — *Un observateur en un lieu dont la latitude boréale est* $\lambda = 47^\circ 47' 32''$ *aperçoit à une hauteur* $H = 52^\circ 38' 18''$, *du côté de l'Est, une étoile dont la déclinaison boréale est* $D = 22^\circ 30' 26''$.

On demande de trouver : 1° *l'azimut de cette étoile;* 2° *quel temps s'est écoulé depuis son lever;* 3° *quel temps s'écoulera jusqu'à son coucher.*

(Juin 1909.)

QUESTION.

2143. — Soient ABCD un tétraèdre et P un point quelconque de l'espace. La droite PA rencontre la face BCD en A_1 et les droites BA_1, CA_1, DA_1 coupent CD, DB, BC en L, M, N. On joint le milieu I de AA_1 au centre O de la conique inscrite à BCD en L, M, N. A chacun des sommets du tétraèdre correspond une droite IO.

Démontrer que ces quatre droites sont concourantes.

(P. Sondat.)

[M²7b]

SURFACES PARTIELLEMENT CYLINDROÏDES;

PAR M. E. KERAVAL,

Professeur au lycée Hoche.

Définition. — Je dirai qu'un point A est un point de Cayley pour une surface réglée lorsque les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les génératrices forment une section plane de la surface; je désignerai par P_A le plan de cette section. Pour la surface appelée *cylindroïde de Cayley*, tout point A de l'espace est un point de Cayley.

MM. Appell et Bricard ont montré dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, années 1900-1901, que ce cylindroïde était la seule surface réglée réelle jouissant de la propriété en question pour tout point de l'espace. Pour les autres surfaces réglées, les points de Cayley A sont donc ou des points isolés ou bien formant des courbes ou des surfaces quand il en existe. Je laisse de côté des surfaces réglées qui possèdent zéro, un ou deux points de Cayley; j'appelle donc surfaces partiellement cylindroïdes celles qui possèdent au moins trois points de Cayley.

J'arrive alors à la classification suivante :

1° Les surfaces à plan directeur qui possèdent deux points de Cayley en possèdent une infinité situés sur un cylindre de révolution ou dans un plan. L'équation de ces surfaces résulte de l'élimination de t entre

$$\begin{cases} y = tx - kt^2, \\ z = \dfrac{at^3 + bt^2 + c}{1 + t^2}. \end{cases}$$

L'ensemble des termes du plus haut degré est

$$z(x^2+y^2)(kz+ax).$$

Ces surfaces sont donc du quatrième degré. Si $a=0$, $k=0$, on a le cylindroïde de Cayley.

Tout ceci est extrêmement facile, je le laisse de côté.

2° Les surfaces à cône directeur. Je trouve :

1° Des surfaces S_9 du neuvième degré à cône directeur du troisième degré avec dix points de Cayley;

2° Des surfaces du huitième degré S_8 à cône directeur du deuxième degré avec quatre points de Cayley; on a alors une infinité formant une conique;

3° Des surfaces du sixième degré S_6 avec cône directeur du deuxième degré. Ici les points de Cayley forment une *sextique* qui dans le cas général est indécomposable et qui a pour ses six directions asymptotiques les perpendiculaires aux six plans cycliques du cône directeur.

Dans les cas particuliers, la sextique peut se décomposer en une conique et une quartique ou en trois coniques.

Le degré 6 peut s'abaisser; c'est ainsi qu'on trouve des surfaces du quatrième degré avec deux droites de Cayley. Ces droites sont toujours perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur.

4° Enfin la surface peut s'abaisser au second degré; la sextique est alors réduite à six droites (pour l'un des systèmes de génératrices).

Ce sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes de la surface, ou encore les perpendiculaires aux plans cycliques menées par les foyers du contour apparent de la surface sur les plans cycliques

centraux. Si d'un point d'une de ces droites on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices du système considéré, les pieds sont sur un cercle de la quadrique.

DÉFINITION DU COMPLEXE AP_A.

Étant donnés un point A et un plan P_A, j'appelle *complexe* AP_A l'ensemble des droites Δ telles que le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ soit dans P_A. Ce complexe est du deuxième degré. Son cône de sommet S a pour sections circulaires :

1° Les plans parallèles à P_A ;

2° Les plans perpendiculaires sur S_A.

La courbe du complexe située dans un plan Q est une parabole ayant pour foyer le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Q et pour tangente au sommet l'intersection de Q et de P_A.

Notations. — J'ai dû me servir quelquefois d'axes obliques.

$$\widehat{yOz} = \varphi, \qquad \widehat{zOx} = \varphi', \qquad \widehat{xOy} = \varphi''.$$

Pour définir une droite Δ, je me servirai souvent de la notation

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

ou alors de deux points $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$. Je pose alors comme d'habitude

$$x_0 - x_1 = X, \qquad y_1 z_0 - y_0 z_1 = L,$$
$$y_0 - y_1 = Y, \qquad z_1 x_0 - z_0 x_1 = M,$$
$$z_0 - z_1 = Z, \qquad x_1 y_0 - x_0 y_1 = N.$$

On peut prendre alors

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = 1, \quad L = q, \quad M = -p, \quad N = bp - aq.$$

Je pose

$$\begin{aligned}
\rho &= NY - MZ = (b^2+1)p - abq,\\
\rho' &= LZ - NX = -abp + (a^2+1)q,\\
\rho'' &= MX - LY = -ap - bq.
\end{aligned}$$

Je désignerai habituellement les coordonnées de A par $\alpha\beta\gamma$ et l'équation de P_A par

$$Ax + By - Cz + D = 0.$$

L'équation du complexe AP_A est alors, en posant pour abréger

$$\begin{aligned}
U &= X + Y\cos\varphi'' + Z\cos\varphi',\\
V &= X\cos\varphi'' + Y + Z\cos\varphi,\\
W &= X\cos\varphi' + Y\cos\varphi + Z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D(UX + VY + WZ) + (AX + BY + CZ)(\alpha U + \beta V + \gamma W)\\
&\quad + A(NV - MW) + B(LW - NU) + C(MU - LV) = 0.
\end{aligned}$$

En axes rectangulaires :

$$\begin{aligned}
&D(X^2 + Y^2 + Z^2) + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(AX + BY + CZ)\\
&\qquad + A\rho + B\rho' + C\rho'' = 0
\end{aligned}$$

ou

$$\varphi(XYZ) + A\rho + B\rho' + C\rho'' = 0.$$

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES SURFACES S_9.

Axes rectangulaires. — Les surfaces qui possèdent trois points de Cayley A, B, C ont pour génératrices les droites communes à trois complexes AP_A, BP_B, CP_C.

Je suppose ici que $P_A P_B P_C$ forme un véritable trièdre :

$$\begin{aligned} &A : \alpha\beta\gamma, && P_A : Ax + By + Cz + D = 0, \\ &B : \alpha'\beta'\gamma', && P_B : A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ &C : \alpha''\beta''\gamma'', && P_C : A''x + B''y + C''z + D'' = 0; \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A''_1 & B''_1 & C''_1 \end{vmatrix} \text{ adjoint de } \Delta.$$

Ma surface est définie par les trois complexes

$$\begin{cases} A\rho + B\rho' + C\rho'' + \varphi_1(XYZ) = 0, \\ A'\rho + B'\rho' + C'\rho'' + \varphi_2(XYZ) = 0, \\ A''\rho + B''\rho' + C''\rho'' + \varphi_3(XYZ) = 0; \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer $\rho\rho'\rho''$, car $\Delta \neq 0$,

$$A\rho + A_1\varphi_1 + A'_1\varphi_2 + A''_1\varphi_3 = 0, \qquad \ldots.$$

ou, pour abréger,

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta\rho + \Phi_1 = 0, & \Phi_1 = A_1\varphi_1 + A'_1\varphi_2 + A''_1\varphi_3, \\ \Delta\rho' + \Phi_2 = 0, & \Phi_2 = B_1\varphi_1 + B'_1\varphi_2 + B''_1\varphi_3, \\ \Delta\rho'' + \Phi_3 = 0, & \Phi_3 = C_1\varphi_1 + C'_2\varphi_2 + C''_1\varphi_3. \end{cases}$$

Je multiplie (1) par XYZ et j'ajoute; j'ai

$$(2) \qquad X\Phi_1 + Y\Phi_2 + Z\Phi_3 = 0.$$

C'est le cône directeur; il est du troisième degré.

Je démontrerai que ce n'est jamais une identité et je chercherai dans quel cas il peut se décomposer. Les deux premières équations (1) me donnent ensuite ρ et ρ', c'est-à-dire, avec la notation $abpq$,

$$\begin{cases} (b^2+1)p - abq = -\dfrac{\Phi_1}{\Delta}, \\ -abp + (a^2+1)q = -\dfrac{\Phi_2}{\Delta}, \end{cases}$$

d'où

$$(3)\quad \begin{cases} x - az = p = \dfrac{a\Phi_3 - \Phi_1}{\Delta(a^2 + b^2 + 1)}, \\ y - bz = q = \dfrac{b\Phi_3 - \Phi_2}{\Delta(a^2 + b^2 + 1)}, \\ bx - ay = \dfrac{a\Phi_2 - b\Phi_1}{\Delta(a^2 + b^2 + 1)}, \\ a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3 = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations de la surface ; la dernière donne le cône directeur, c étant une variable d'homogénéité. En cherchant les points de rencontre avec une droite, on trouve que la surface S_9 est du neuvième degré, et d'ailleurs elle peut se décomposer en trois cylindroïdes. La section par le plan de l'infini se compose de la cubique du cône directeur, plus six génératrices isotropes qu'on obtient en résolvant

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 0, \\ a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3 = 0. \end{cases}$$

La cubique peut être quelconque, mais elle détermine les six génératrices isotropes. En outre, à chaque génératrice du cône directeur, correspond une génératrice et une seule de la surface, et réciproquement. Il reste à faire voir que la relation

$$a\Phi_1 + b\Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

n'est pas une identité.

Théorème. — *Si* $P_A P_B P_C$ *forment un vrai trièdre et si* A, B, C *ne sont pas confondus au sommet du trièdre, la relation entre les paramètres directeurs de la droite n'est pas une identité.* Cette fois je prends les axes obliques et

$$P_A = yOz, \qquad P_B = zOx, \qquad P_C = xOy.$$

Les trois complexes s'écrivent

$$\begin{cases} NV - MW + x(\alpha U + \beta V - \gamma W) = 0. \\ LW - NU + y(\alpha' U - \beta' V + \gamma' W) = 0. \\ MU - LV + z(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0. \end{cases}$$

d'où le cône

$$Ux(\alpha U + \beta V + \gamma W) + Vy(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) + Wz(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0.$$

Soient

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi'' & \cos\varphi' \\ \cos\varphi'' & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi' & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{son adjoint.}$$

Je change de variables et je prends UVW; l'équation devient

$$\begin{aligned} &U(\alpha U + \beta V + \gamma W)(aU + bV + dW) \\ &+ V(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W)(bU + cV + eW) \\ &+ W(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W)(dU + eV + fW) = 0. \end{aligned}$$

En écrivant que c'est une identité, on trouve facilement que $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ sont nuls.

Je montrerai qu'en général le cône du troisième ne se décompose pas; j'ai donc bien, en général, une surface S_9 du neuvième degré sans décomposition, coupée par le plan de l'infini comme il a été indiqué.

RECHERCHE DE TOUS LES POINTS DE CAYLEY DES SURFACES S_9.

Théorème préliminaire. — *Si une surface* S_9, *formée avec trois complexes* AP_A, BP_B, CP_C, *appartient à un quatrième complexe de même forme, ce dernier est certainement une combinaison linéaire à coefficients constants des trois premiers, c'est-*

à-dire est l'un des complexes à trois termes

$$\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F_3 = 0,$$

$F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ étant les équations des trois premiers complexes.

En effet, les trois complexes donnés peuvent être remplacés par

$$\rho + \Phi_1(a, b) = 0,$$
$$\rho' + \Phi_2(a, b) = 0,$$
$$\rho'' + \Phi_3(a, b) = 0,$$

qui en sont des combinaisons linéaires à coefficients constants $\left(\text{j'ai remplacé } \frac{\Phi}{\Delta} \text{ par } \Phi\right)$. Le quatrième complexe est de la forme

$$F_4 \equiv A^{IV}\rho + B^{IV}\rho' + C^{IV}\rho'' + \varphi_4(ab) = 0,$$

et par conséquent sur la surface S_9 on a

$$\varphi_4 \equiv A^{IV}\Phi_1 + B^{IV}\Phi_2 + C^{IV}\Phi_3,$$

qui est une identité, sans quoi le cône directeur serait du deuxième degré. Donc

$$F_4 \equiv A^{IV}(\rho + \Phi_1) + B^{IV}(\rho' + \Phi_2) + C^{IV}(\rho'' + \Phi_3),$$

ce qui démontre le théorème.

DÉTERMINATIONS DES DIX POINTS DE CAYLEY DES SURFACES S_9.

Quand on cherche à déterminer les points de Cayley avec des axes rectangulaires quelconques, on trouve qu'ils sont à l'intersection de trois surfaces du troisième degré qui ont en commun une cubique gauche qui ne convient pas, ce qui *semble* donner dix points. En prenant des axes obliques on peut choisir, comme plus

haut, P_A, P_B, P_C pour les plans coordonnés : $P_A = yOz$, $P_B = zOx$, $P_C = xOy$. Les trois complexes sont

$$\begin{cases} NV - MW + X(\alpha U + \beta V + \gamma W) = 0, \\ LW - NU + Y(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) = 0, \\ MU - LV + Z(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0. \end{cases}$$

On ajoute après avoir multiplié par $\lambda\mu\nu$ et l'on identifie avec

$$\begin{aligned} &A(NV - MW) + B(LW - NU) + C(MU - LV) \\ &\quad + (AX + BY + CZ)(\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W) \\ &\qquad\qquad + D(UX + VY + WZ) = 0. \end{aligned}$$

On a de suite

$$\lambda = A, \qquad \mu = B, \qquad \nu = C.$$

Les termes en $X^2Y^2Z^2$ donnent ensuite

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \beta\cos\varphi'' + \gamma\cos\varphi') &= D + \lambda(\alpha_1 + \beta_1\cos\varphi'' + \gamma_1\cos\varphi'), \\ \mu(\alpha'\cos\varphi'' + \beta' + \gamma'\cos\varphi) &= D + \mu(\alpha_1\cos\varphi'' + \beta_1 + \gamma_1\cos\varphi), \\ \nu(\alpha''\cos\varphi' + \beta''\cos\varphi + \gamma'') &= D + \nu(\alpha_1\cos\varphi' + \beta_1\cos\varphi + \gamma_1). \end{aligned}$$

ou, avec une notation facile à comprendre,

$$\begin{cases} \lambda U_A = D + \lambda U, \\ \mu V_B = D + \mu V, \\ \nu W_C = D + \nu W. \end{cases}$$

Premier cas.

$$U \neq U_A, \qquad V \neq V_B, \qquad W \neq W_C.$$

Alors

$$\lambda = \frac{-D}{U - U_A}, \qquad \mu = \frac{-D}{V - V_B}, \qquad \nu = \frac{-D}{W - W_C}.$$

Enfin les termes rectangles me donnent trois équations. Par exemple le terme en YZ :

$$\begin{aligned} &\mu(\alpha'\cos\varphi' + \beta'\cos\varphi + \gamma') + \nu(\alpha''\cos\varphi'' + \beta'' + \gamma''\cos\varphi) \\ &\quad = \mu(\alpha_1\cos\varphi' + \beta_1\cos\varphi + \gamma_1) \\ &\qquad + \nu(\alpha_1\cos\varphi'' + \beta_1 + \gamma_1\cos\varphi) + 2D\cos\varphi, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mu W_B + \nu V_C = \mu W + \nu V + 2 D \cos\varphi$$

ou

$$\mu(W_B - W) + \nu(V_C - V) = 2 D \cos\varphi.$$

En remplaçant $\lambda\mu\nu$ par leurs valeurs, on voit que les points de Cayley sont les points communs aux trois quadriques

S. $$2\cos\varphi = \frac{V - V_C}{W - W_C} + \frac{W - W_B}{V - V_B},$$

S'. $$2\cos\varphi' = \frac{W - W_A}{U - U_A} + \frac{U - U_C}{W - W_C},$$

S''. $$2\cos\varphi'' = \frac{U - U_B}{V - V_B} + \frac{V - V_A}{U - U_A}.$$

Ce sont trois cylindres de révolution bien faciles à définir géométriquement. S, par exemple, est un cylindre de révolution à génératrices perpendiculaires à yOz, car $V = 0$, $W = 0$ sont deux plans perpendiculaires, l'un à Oy, l'autre à Oz. De plus, l'ensemble des termes du deuxième degré est

$$-\sin^2\varphi(y^2 + z^2 + 2yz\cos\varphi).$$

S est vérifiée pour $V = V_B$, $W = W_B$, donc passe par B, de même par C. Enfin S passe par l'intersection des plans

$$W = W_C, \qquad V = V_B.$$

Le cylindre de révolution S perpendiculaire à P_A passe par B et C, puis par l'intersection du plan mené par B perpendiculairement à l'intersection de P_A, P_C et du plan mené par C perpendiculairement à l'intersection de $P_A P_B$. On définirait de même les deux autres. Ces trois cylindres ne peuvent pas avoir de courbe commune; ils se coupent en huit points, mais l'un d'eux ω doit être rejeté. Il est défini par

$$U = U_A, \qquad V = V_B, \qquad W = W_C.$$

Les sept autres conviennent; on a en plus ABC, en tout dix points.

Deuxième cas. — $U - U_A$, $V - V_B$, $W - W_C$ ne sont pas tous trois différents de zéro. On trouve alors que deux des coefficients $\lambda\mu\nu$ doivent être nuls; on a alors les points A, B, C.

CONSTRUCTION DES DIX POINTS DE CAYLEY, CONNAISSANT LES TROIS CYLINDRES S, S′, S″.

On se donne trois cylindres de révolution S, S′, S″ dont les axes ne soient pas parallèles à un même plan et qui aient un point commun réel ω. On met ce point à part; les sept autres points sont gardés comme points de Cayley. On forme un trièdre $Oxyz$ dont les faces soient perpendiculaires aux cylindres. Il reste à trouver trois points de Cayley, A, B, C. Le plan qui passe par ω et est perpendiculaire à Ox coupe S″ suivant deux génératrices: l'une passe par ω, l'autre par A. De même le plan qui passe par ω et est perpendiculaire à Ox donnera une autre droite passant par A, d'où A. On a de même B et C.

Remarque. — Il résulte de là que, si les trois points A, B, C supposés liés subissent un mouvement de translation par rapport au trièdre $P_A P_B P_C$, ils entraînent avec eux sans déformation le système des dix points.

CONSTRUCTION DES DIX PLANS DE CAYLEY QUI CORRESPONDENT AUX DIX POINTS.

Si je désigne par $ux + vy + wz + s = 0$ l'équation du plan de Cayley qui correspond au point $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ ou mieux xyz, les six équations qu'on a trouvé plus haut

s'écrivent

$$(4)\qquad \begin{cases} u(U - U_A) = -s, \\ v(V - V_B) = -s, \\ w(W - W_C) = -s; \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} v(W - W_B) + w(V - V_C) + 2s\cos\varphi = 0, \\ w(U - U_C) + u(W - W_A) + 2s\cos\varphi' = 0, \\ u(V - V_A) + v(U - U_B) + 2s\cos\varphi'' = 0. \end{cases}$$

En éliminant $\frac{u}{s}$, $\frac{v}{s}$, $\frac{w}{s}$ on a les trois cylindres qui déterminent le point xyz de Cayley. Pour avoir les plans de Cayley, il faut faire le contraire : éliminer xyz, c'est-à-dire UVW. On trouve ainsi

$$(6)\qquad \begin{cases} s(v^2 + w^2 - 2vw\cos\varphi) + vw[(W_B - W_C)v + (V_C - V_B)w] = 0, \\ s(w^2 + u^2 - 2wu\cos\varphi') + wu[(U_C - U_A)w + (W_A - W_C)u] = 0, \\ s(u^2 + v^2 - 2uv\cos\varphi'') - uv[(V_A - V_B)u + (U_B - U_A)v] = 0. \end{cases}$$

La troisième, par exemple, représente une hypocyclide à trois rebroussements, tangente à Ox, Oy. Il vaut mieux procéder autrement pour avoir les plans de Cayley. Soient D un quatrième point de Cayley, P_D le plan correspondant. Cherchons l'équation du plan P_D. On a

$$u = \frac{s}{U_A - U_D}, \qquad \ldots;$$

donc l'équation du plan P_D est

$$\frac{x}{U_A - U_D} - \frac{y}{V_B - V_D} - \frac{z}{W_C - W_D} + 1 = 0.$$

Il coupe les axes en trois points H, K, L tels que

$$\overline{OH} = U_D - U_A, \qquad \overline{OK} = V_D - V_B, \qquad \overline{OL} = W_D - W_C.$$

D'où la règle suivante :

Prendre sur Ox, Oy, Oz *des vecteurs* $\overline{OH}$, $\overline{OK}$, $\overline{OL}$

égaux aux projections orthogonales de AD, BD, CD *sur* Ox, Oy, Oz. *Le plan* HKL *est le plan cherché* P_D.

Il résulte de là que, si l'ensemble des dix points subit un mouvement de translation par rapport au trièdre $P_A P_B P_C$, les sept autres plans de Cayley restent immobiles.

EXEMPLE D'ABAISSEMENT DU NOMBRE DES POINTS DE CAYLEY.

Ce nombre 10 peut s'abaisser. J'indiquerai un seul exemple. Supposons les axes rectangulaires et prenons A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz :

$$OA = \alpha, \qquad OB = O\beta, \qquad OC = \gamma$$

avec

$$P_A \equiv yOz, \qquad P_B \equiv zOx, \qquad P_C \equiv xOy.$$

On trouve sept points de Cayley qui forment sept des sommets d'un parallélépipède rectangle. Le cône directeur de la surface est

$$\alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 = 0.$$

La surface s'obtient en éliminant a, b entre les équations

$$\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma = 0,$$

$$x - az = \frac{a(\gamma - \alpha a)}{a^2 + b^2 + 1}, \qquad y - bz = \frac{b(\gamma - \beta b)}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Les quatre plans nouveaux de Cayley ont pour équations

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + 1 = 0,$$

qui correspond à l'origine

$$\alpha x - \beta y = 0, \qquad \beta y - \gamma z = 0, \qquad \gamma z - \alpha x = 0.$$

Les trois derniers passent par une même droite.

DOUBLE ET TRIPLE DÉCOMPOSITION DES SURFACES S_9.

Pour établir qu'il y avait dix points de Cayley, j'ai supposé que la S_9 ne se décomposait pas. Je vais montrer qu'il peut arriver que la S_9 se décompose ou bien en une surface du sixième degré S_6 et un cylindroïde de Cayley, ou bien en trois cylindroïdes. Dans ce dernier cas, les dix points seraient les points de Cayley communs aux trois cylindroïdes, c'est-à-dire ayant le même plan de Cayley dans chacun d'eux.

Pour que S_9 se décompose, il faut et il suffit que son cône directeur se décompose, et alors on a une surface à plan directeur ayant trois plans de Cayley formant trièdre, ce qui n'arrive que dans le conoïde.

Je prends $P_A P_B P_C$ pour trièdre de référence. ABC ont pour coordonnées $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$. Le cône directeur a pour équation

$$\begin{aligned} 0 = {} & Ux(\alpha U - \beta V + \gamma W) \\ & + Vy(\alpha' U + \beta' V - \gamma' W) - Wz(\alpha'' U - \beta'' V - \gamma'' W). \end{aligned}$$

Je change de variables et je désigne par

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{l'adjoint de} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi'' & \cos\varphi' \\ \cos\varphi'' & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi' & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix}.$$

Je sais que, si la S_9 se décompose et donne un cylindroïde de plan directeur Q, il en est encore ainsi

quand A, B ou C se déplace perpendiculairement à Q. C'est cette considération qui va me guider dans tout ce qui suit. Je prends U, V, W pour variables; le cône devient

$$\begin{aligned}&U(\alpha U+\beta V+\gamma W)(aU+bV+dW)\\&+V(\alpha' U+\beta' V+\gamma' W)(bU+cV+eW)\\&+W(\alpha'' U+\beta'' V+\gamma'' W)(dU+eV+fW)=0.\end{aligned}$$

J'écris qu'il se décompose et contient le plan

$$U=pV+qW;$$

j'ai ainsi quatre équations :

$$(7)\qquad (\beta'+\alpha' p)(c+bp)(\beta+\alpha p)(ap^2+bp)=0,$$

$$(8)\qquad (\gamma''+\alpha'' q)(f+dq)(\gamma+\alpha q)(aq^2+dq)=0,$$

$$\begin{aligned}(9)\quad &(\beta'+\alpha' p)(e+bq)+(\gamma'+\alpha' q)(c+bp)\\&+(\beta''+\alpha'' p)(e+dp)+(\beta+\alpha p)(2apq+dp+bq)\\&+(\gamma+\alpha q)(ap^2+bp)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10)\quad &(\gamma'+\alpha' q)(e+bq)+(\beta''+\alpha'' p)(f+dq)\\&+(\gamma''+\alpha'' q)(e+dp)+(\beta+\alpha p)(aq^2+dq)\\&+(\gamma+\alpha q)(2apq+dp+bq)=0.\end{aligned}$$

Je me donne le trièdre $P_A P_B P_C$ et le point $A(\alpha\beta\gamma)$; ces équations me montrent que $B(\alpha'\beta'\gamma')$ et $C(\alpha''\beta''\gamma'')$ sont l'un sur une droite Δ', l'autre sur une droite Δ'', ces deux droites dépendant de deux paramètres p, q. Donc Δ' et Δ'' engendrent deux congruences et se correspondent dans ces deux congruences suivant une certaine loi. Or, il arrive que chaque fois que deux droites Δ' se coupent, les droites Δ'' correspondantes se coupent également. Le calcul est trop long en axes obliques, mais je l'ai vérifié quand le trièdre $P_A P_B P_C$ est trirectangle. Du reste, ceci résultera de ce qui va suivre.

J'imagine que je me donne A et B; l'équation (7)

me donne trois valeurs pour p. Entre les équations (8), (9) et (10), j'élimine $\beta'' + \alpha'' p$ et $\gamma'' + \alpha'' q$; j'ai une équation du troisième degré en q.

Je tire

$$(11) \quad \begin{cases} \beta'' + \alpha'' p = f_1(q), \\ \gamma'' + \alpha'' q = \dfrac{f_3(q)}{f + dq}, \end{cases}$$

f_1, f_3 étant de degrés 1 et 3. Je porte dans (10).

J'ai ainsi, dans le cas le plus général, neuf systèmes de valeurs en p, q, et, à chaque système, les équations (11) font correspondre une droite sur laquelle se trouve C.

Ainsi, ayant choisi A et B pour que S_9 se décompose, il faut et il suffit que C se trouve en un point arbitrairement choisi sur neuf droites parfaitement déterminées. Or, je dis que ces neuf droites se coupent trois par trois en six points, c'est-à-dire forment comme les six côtés et les trois diagonales d'un hexagone gauche.

Il en résultera que, A et B une fois choisis, il existe neuf droites sur lesquelles il faut prendre C pour avoir une double décomposition et six points C_1, C_2, ..., C_6 pour lesquels on a la triple décomposition, c'est-à-dire que, si C est pris en l'un de ces six points, S_9 se décompose en trois surfaces du troisième degré qui sont des cylindroïdes.

Je vais d'abord montrer que sur chacune des neuf droites il y a deux points C pour lesquels se produit la triple décomposition. Je remarque immédiatement que, si en un point passent deux droites Δ'', il en passe nécessairement trois : ce sont les perpendiculaires aux plans de décomposition du cône. Le cône exprimé en UVW s'écrit

$$U(\alpha U + \beta V + \gamma W)(aU + bV + dW + \ldots = 0.$$

J'ordonne en U et je divise par $U-(pV+qW)$; la division est exacte, puisque C est sur l'une des neuf droites et le quotient est de la forme

$$AU^2+A'V^2-A''W^2+2BVW+2B'WU+2B''UV=0.$$

Les six coefficients sont

$$\left\{\begin{aligned}
A &= a\alpha,\\
A' &= c\alpha'+(b+ap)(\beta+\alpha p)+b(\beta'+\alpha' p),\\
A'' &= f\alpha''+(d+aq)(\gamma+\alpha q)+d(\gamma''+\alpha'' q),\\
2B &= (d+aq)(\beta+\alpha p)+(b+ap)(\gamma+\alpha q)+b(\gamma'+\alpha' q)\\
&\qquad -e\alpha'-c\alpha''+d(\beta''+\alpha'' p),\\
2B' &= d\alpha-d\alpha''-a(\gamma+\alpha q),\\
2B'' &= a(\beta+\alpha p)-b\alpha+b\alpha'.
\end{aligned}\right.$$

Sur la droite que l'on considère, α'', β'', γ'' varient, mais $\beta''+\alpha'' p$ et $\gamma''+\alpha'' q$ sont constants.

Si je remplace α'' par x, les six coefficients sont de la forme

$$A,\qquad A',\qquad A''=A''_1+fx,$$
$$2B=2B_1+ex,\qquad 2B'=2B'_1+dx,\qquad 2B'';$$

x est la seule variable. En égalant à zéro le discriminant, j'ai une équation du deuxième degré en x. En général, le coefficient de x^2 n'est pas nul; donc il y a deux points de triple décomposition sur chacune des neuf droites, donc il y a six points tels que par chacun d'eux, il passe trois des droites.

Cas du trièdre trirectangle. — Si P_A, P_B, P_C forment un trièdre trirectangle, les calculs sont beaucoup plus simples. On ne trouve plus que trois droites qui forment un trièdre. Alors deux des points A, B, C étant choisis, le troisième est parfaitement déterminé s'il y a triple décomposition. Si, par exemple, on prend

$$\alpha''=0,\qquad \beta''=0,\qquad \gamma''=+1\qquad \text{pour C},$$

les points A et B se correspondent par les formules suivantes qui déterminent une transformation birationnelle :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{9x_0y_0^2}{4z_0^3+27x_0^2}, \\ y_1 &= \frac{y_0^3}{4z_0^3+27x_0^2}, \\ z_1 &= \frac{-3y_0^2z_0}{4z_0^3+27x_0^2}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1^3}{4z_1^3+27y_1^2}, \\ y_0 &= \frac{9x_1^2y_1}{4z_1^3+27y_1^2}, \\ z_0 &= \frac{-3x_1^2z_1}{4z_1^3+27y_1^2}. \end{aligned}\right.$$

EXEMPLE DE DOUBLE DÉCOMPOSITION (AXES RECT.).

A :	1,	0,	1;	P_A :	$y-z=0$,
B :	-1,	0,	1;	P_B :	$y+z=0$.
C :	0,	1,	0;	P_C :	$z-x=0$.

La surface S_9 se décompose et donne :

1° Le conoïde

$$z(x^2+y^2)=xy;$$

2° La surface S_6 définie par

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{1-b^2}{3b-1}, \\ x-az=p &= \frac{(1-a)(ab+b-1)}{a^2+b^2+1}, \\ y-bz=q &= \frac{a(1-b^2)+2b}{a^2+b^2+1}. \end{aligned}\right.$$

EXEMPLE DES NEUF DROITES.

Si l'on prend

$$\varphi=\varphi'=90^\circ, \qquad \varphi''=60^\circ$$

avec

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 3, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = -8, \quad \gamma'' = -4,$$

on a d'abord, pour q, trois valeurs

$$q = +1, \quad q = -1, \quad q = \infty.$$

On a d'abord les six droites Δ' suivantes qui correspondent à

$$q = +1 \quad \text{avec} \quad p = 2, \quad 1, \quad 5;$$
$$q = -1 \quad \text{avec} \quad p = 0, \quad -1, \quad 3.$$

$$\Delta'_1 : y + 2x = 18, \qquad z - x = 9,$$
$$\Delta'_2 : y + x = 0, \qquad z + x = -3,$$
$$\Delta'_3 : y + 5x = 0, \qquad z - x = 45,$$
$$\Delta'_4 : y + 2x = -18, \qquad z - x = 33,$$
$$\Delta'_5 : y - x = 0, \qquad z - x = -3,$$
$$\Delta'_6 : y + 3x = 0, \qquad z - x = 45.$$

Ces droites se coupent deux à deux en six points :

$$\begin{array}{lrrr}
B_1 : & 6, & 6, & 3, \\
B_2 : & -18, & 54, & 27, \\
B_3 : & 0, & 0, & 45, \\
B_4 : & 6, & -30, & 39, \\
B_5 : & -18, & 18, & 15, \\
B_6 : & 0, & 0, & -3.
\end{array}$$

Il reste à trouver les trois autres droites qui correspondent à la racine infinie. On trouve les trois droites

$$B_3B_6, \quad B_1B_4, \quad B_2B_5.$$

On a

3 droites parallèles à $z + x = \text{const.}$,
3 » $z - x = \text{const.}$,
3 » $z = \text{const.}$

Il en est toujours ainsi, car on a, pour p, trois

valeurs p_1, p_2, p_3; les droites sont, trois par trois, parallèles aux plans

$$y + p_1 x = 0, \qquad y + p_2 x = 0, \qquad y + p_3 x = 0.$$

SECONDE PARTIE.

ÉTUDE DES SURFACES S_8.

Ces surfaces s'obtiennent en supposant que P_A, P_B, P_C sont parallèles à une même droite, deux d'entre eux n'étant pas parallèles.

Problème préliminaire. — *Condition d'indépendance de trois complexes* AP_A, BP_B, CP_C *où* P_A, P_B, P_C *sont parallèles à une même droite,* Oz *par exemple.*

Je dis qu'ils sont indépendants s'ils déterminent une surface. Dans le cas contraire, les équations se réduisent à deux; on a une congruence.

$$\widehat{xOz} = 90^\circ, \qquad \widehat{yOz} = 90^\circ, \qquad \widehat{xOy} = \varphi$$

Première complexe,

$$A : \alpha\beta\gamma, \qquad P_A : x = 0.$$

Deuxième complexe,

$$B : \alpha'\beta'\gamma', \qquad P_B : y = 0.$$

Ces deux complexes ont pour équations

$$X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + NY + MZ + \cos\varphi[X(\alpha Y + \alpha Y) + NX] = 0,$$
$$Y(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) + LZ + NX + \cos\varphi[Y(\alpha' Y + \beta' X) + NY] = 0,$$

Je multiplie par λ, μ, j'ajoute et j'identifie avec

$$\begin{aligned}&D(X^2+Y^2+(\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z)(AX+BY)\\&+A(NY-MZ)+B(LZ-NX)\\&+\cos\varphi[(\alpha_1 Y+\beta_1 X)(AX+BY)+2DXY+ANX-BNY]=0.\end{aligned}$$

J'en tire

$$\lambda = A, \qquad \mu = B, \qquad D = 0.$$

Donc P_A, P_B, P_C doivent passer par une même droite qui est ici Oz si le troisième est une conséquence des deux autres.

Les autres conditions expriment que A, B, C sont dans un même plan perpendiculaire à Oz, soit xOy. En outre,

BC	perpendiculaire à	P_A,
CA	»	P_B,
AB	»	P_C.

J'ai admis que si les trois complexes n'étaient pas indépendants, c'est-à-dire si l'un est la conséquence des deux autres, ils étaient liés par une relation homogène à coefficients constants.

Or, en axes rectangulaires, on peut les écrire

$$\begin{aligned}A\rho + B\rho' + \varphi_1(XYZ) &= 0,\\A'\rho + B'\rho' + \varphi_2(XYZ) &= 0,\\A''\rho + B''\rho'' + \varphi_3(XYZ) &= 0,\end{aligned}$$

avec

$$AB' - BA' \neq 0.$$

Les deux premiers donnent ρ et ρ'; en portant dans le troisième on a le cône directeur ou une identité. Si les trois complexes ne sont pas indépendants, on a une identité et alors on a bien une relation de la forme indiquée. De là le théorème :

Théorème. — *Pour que le complexe* CP_C *soit une*

conséquence des deux complexes AP_A, BP_B, *où* P_A, P_B *se coupent suivant une droite* Δ *et où* P_C *est parallèle à* Δ, *il faut que* P_C *passe par* Δ *et que*

BC soit perpendiculaire à		P_A,
CA	»	P_B,
AB	»	P_C.

DEGRÉ DES SURFACES S_8.
SECTION PAR LE PLAN DE L'INFINI.

Je me donne trois complexes indépendants AP_A, BP_B, CP_C, et je suppose P_A, P_B, P_C parallèles à Oy.

Les équations des trois complexes sont

$$A\rho - C\rho'' + (AX + CZ)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + D(X^2 + Y^2 - Z^2) = 0,$$
$$A'\rho + C'\rho'' + \ldots = 0,$$
$$A''\rho + C''\rho'' + \ldots = 0.$$

Je suppose $AC' - CA' \neq 0$; alors les deux premières donnent ρ et ρ''. En portant dans la troisième, j'ai le cône. J'ai alors trois équations de la forme

$$\rho = \Phi_1(X, Y, Z) = \Phi(a, b, 1) = \Phi_1(a, b, c),$$
$$\rho' = \Phi_2,$$
$$\Phi_3 = 0.$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 homogènes et du deuxième degré en X, Y, Z ou a, b, c.

On en tire

$$\left\{\begin{aligned} x - az = p &= \frac{\Phi_1 - a\Phi_2}{a^2 + b^2 + 1}, \\ y - bz = q &= \frac{-a\Phi_1 - (b^2 + 1)\Phi_2}{a^2 + b^2 + 1}, \\ \Phi_3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

On a quatre génératrices isotropes dans le plan de

l'infini. La section par ce plan se compose d'abord de ces quatre droites, puis de la conique du cône directeur, enfin de deux génératrices orthogonales à l'intersection de P_A, P_B. Enfin la surface est unicursale et du huitième degré.

CONDITION D'ABAISSEMENT DU DEGRÉ DES SURFACES S_9, S_8.

Ce degré s'abaisse si les numérateurs de p, q contiennent $a^2 + b^2 + 1$ en facteur, c'est-à-dire si les génératrices isotropes sont à distance finie. La considération du cône du complexe montre qu'il faut : ou que deux des plans P_A, P_B, P_C soient parallèles (on a alors une droite de Cayley), ou que A, B, C soient en ligne droite. Le degré s'abaisse alors de deux unités. Je reviendrai sur les droites de Cayley. On suppose que

$$a^2 + b^2 \neq \text{const.}$$

RECHERCHE DES POINTS DE CAYLEY DES SURFACES S_8.

$$\widehat{xOy} = \varphi, \qquad \widehat{yOz} = 90^\circ, \qquad \widehat{zOx} = 90;$$

$$\begin{aligned} A &: \alpha\beta\gamma, & P_A &: x = 0, \\ B &: \alpha'\beta'\gamma', & P_B &: y = 0, \\ C &: \alpha''\beta''\gamma'', & P_C &: y - mx + h = 0. \end{aligned}$$

Les trois complexes ont pour équations

$$X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + (NY - MZ) + \cos\varphi[X(\alpha Y + \beta X) + NX] = 0,$$

$$Y(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) + (LZ - NX) - \cos\varphi[Y(\alpha' Y + \beta' X) - NY] = 0,$$

$$\begin{aligned} &h(X^2 + Y^2 + Z^2) + (\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z)(Y - mX) \\ &\quad - m(NY - MZ) + (LZ - NX) \\ &\quad + \cos\varphi[(\alpha'' Y + \beta'' X)(Y - mX) + 2hXY - mNX - NY] = 0. \end{aligned}$$

J'appelle xyz le nouveau point de Cayley. Je mul-

tiplie les équations précédentes par $\lambda\mu\nu$, j'ajoute et j'identifie avec

$$\begin{aligned}&D(X^2-Y^2+Z^2)+(xX+yY+zZ)(AX+BY)\\&\quad-A(NY-MZ)+B(LZ-NX)\\&\quad+\cos\varphi[(xY+yX)(AX+BY)-2DXY-ANX-BNY]=0.\end{aligned}$$

On arrive facilement aux équations suivantes :

$$\begin{cases}\lambda U_A=m\nu U_C,\\ \mu V_B=-\nu V_C,\\ \lambda V_A+\mu U_B+\nu U_C=m\nu V_C,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda(z-\gamma)=m\nu(z-\gamma''),\\ \mu(z-\gamma')=-\nu(z-\gamma''),\end{cases}$$

où $U_{A=0}$ représente le plan perpendiculaire à Ox et qui passe par A, ...

Premier cas : γ, γ', γ'' *inégaux*. — On trouve alors un seul nouveau point de Cayley qui est à l'intersection de trois plans :

Q_A perpendiculaire à		P_A	mené par	BC,
Q_B	»	P_B	»	CA,
Q_C	»	P_C	»	AB.

Si A, B, C sont en ligne droite, il y a donc une droite de Cayley, sinon quatre points.

Deuxième cas : $\gamma'=\gamma$. — On peut supposer

$$\gamma'=\gamma=0,\qquad \gamma''\neq 0.$$

On trouve également un seul nouveau point de Cayley ou alors une droite si AB est perpendiculaire à P_C.

Troisième cas : $\gamma=\gamma'=\gamma''$. — Alors A, B, C sont dans un plan perpendiculaire à la droite Δ à laquelle

P_A, P_B, P_C sont parallèles. Ce cas va nous conduire à la conique de Cayley.

SURFACES S_8 QUI POSSÈDENT UNE CONIQUE DE CAYLEY.

On peut supposer $\gamma = \gamma' = \gamma'' = 0$. Les équations trouvées plus haut entraînent alors $z = 0$, c'est-à-dire que les nouveaux points de Cayley sont dans le plan ABC. On trouve, en outre,

$$m(V_A U_C - U_A V_C) V_B = (U_B V_C - V_B U_C) U_A.$$

C'est l'équation d'une conique qui passe : 1° par ABC, 2° par A'B'C', savoir C' à l'intersection $U_A = 0$, $V_B = 0$, ... On retrouve ainsi le théorème de Pascal avec la droite de Pascal rejetée à l'infini. L'hexagone est AB'CA'BC'A avec

AB'	parallèle à	BA'	perpendiculaires à	P_C,
BC'	»	CB'	»	P_A,
CA'	»	AC'	»	P_B.

La conique peut donc être absolument quelconque.

Le plan de Cayley qui correspond à un point xy de cette conique s'écrit

$$m V_B (U_C - U_A) x + U_A (V_B - V_C) y + h U_A V_B = 0.$$

Il enveloppe un cylindre de troisième classe dont les génératrices sont parallèles à Δ.

EXEMPLE NUMÉRIQUE AVEC CERCLE DE CAYLEY.

Je prends des axes rectangulaires, A sur Ox, B sur Oy, C à l'origine,

$$CA = CB = 2h.$$

$$P_A : yOz, \qquad P_B : zOx, \qquad P_C : x + y - h = 0.$$

Les équations de la surface sont

$$\begin{cases} x - az = p = -ah(a^3 + b^3 + a), \\ y - bz = q = -bh(a^3 + b^3 + b), \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

La surface est bien du huitième degré et ne se décompose pas.

L'équation du cercle de Cayley est

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 2h(x + y).$$

Les plans de Cayley sont parallèles à Oz et leurs traces sur xOy enveloppent une hypocycloïde à trois points de rebroussement. Ces traces sont les droites de Simpson du triangle CEF :

$$\overline{CE} = -h \qquad \text{sur } Cx,$$
$$\overline{CF} = -h \qquad \text{sur } Cy.$$

DÉCOMPOSITION DES SURFACES S_8 EN DEUX SURFACES S_4 A PLAN DIRECTEUR. CONDITION DE RÉALITÉ DES SURFACES S_8.

La question étant très facile, je me contenterai d'indiquer les résultats. Les surfaces S_8 peuvent être réelles ou imaginaires selon que le cône directeur du deuxième degré est lui-même réel ou imaginaire. Elles se décomposent en deux surfaces S_4 à plan directeur si le cône se décompose en deux plans. (A propos des S_4, j'ai omis de dire qu'elles possèdent une cubique gauche nodale tracée sur le cylindre de révolution de Cayley.)

Ayant choisi P_A, P_B, P_C parallèles à une droite Δ, ainsi que les points A et B, la surface S_8 se décompose quand le point C est pris sur une quadrique qui peut être, suivant les cas, un paraboloïde elliptique ou hyperbo-

lique. Dans ce dernier cas seulement, les deux surfaces S_4 sont réelles et leurs plans directeurs sont perpendiculaires aux génératrices du paraboloïde hyperbolique qui passent au point C considéré.

Quand le paraboloïde est hyperbolique, S_8 est toujours réelle ; s'il est elliptique il partage l'espace en deux régions : il faut prendre C dans l'une d'elles pour que S_8 soit réelle.

COMPLÉMENT SUR LES DIX POINTS DES S_9. EXEMPLE NUMÉRIQUE DE M. DARBOUX.

Je reviens au cas des S_9. Il y a en général dix points de Cayley auxquels correspondent dix plans.

On peut se demander si ces dix points et les plans correspondants jouent exactement le même rôle et si, par exemple, trois des plans forment toujours un trièdre. Or, on voit bien sur des exemples numériques qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Si le fait se produit, c'est que les trois complexes correspondants ne sont pas indépendants, sans quoi le cône directeur serait du deuxième degré ; or, on le suppose du troisième. Alors, d'après ce que nous avons vu, chaque complexe est une combinaison linéaire à coefficients constants des deux autres, les trois plans P_A, P_B, P_C passent par une droite Δ et l'on a

BC	perpendiculaire à	P_A,
CA	»	P_B,
AB	»	P_C.

Je dis que les sept points autres que A, B, C sont encore sur trois cylindres de révolution d'axes perpendiculaires à Δ.

Je me donne A, B, C, P_A, P_B, P_C, comme il est dit,

et je prends

$$A : \alpha\beta O, \qquad P_A : x = 0,$$
$$B : \alpha'\beta' O. \qquad P_B : y = 0.$$

$$yOz = 90^\circ, \qquad \widehat{zOx} = 90^\circ, \qquad xOy = \varphi.$$

Pour déterminer la surface, il faut se donner un quatrième complexe

$$D : \alpha''\beta''\gamma'', \qquad P_D : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Des calculs absolument analogues à d'autres faits plus haut me conduisent aux cinq équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda(U - U_A) + A(U - U_D) = C(z - \gamma''),\\
&\mu(V - V_B) + B(V - V_D) = C(z - \gamma''),\\
&C(V - V_D) - B(z - \gamma'') + \mu z = 0,\\
&C(U - U_D) + A(z - \gamma'') + \lambda z = 0,\\
&A(V - V_D) + B(U - U_D) + \lambda(V - V_A)\\
&\qquad + \mu(U - U_B) - 2C(z - \gamma'')\cos\varphi = 0.
\end{aligned}\right.$$

Je tire $\lambda\mu$ des deux premiers; en portant dans les trois dernières, j'ai les équations des trois surfaces qui déterminent les sept points autres que A, B, D. L'équation quatrième me donne

$$(S) \qquad C(V - V_D)(V - V_B) - B(V - V_B)(z - \gamma'')$$
$$- Cz(z - \gamma'') - Bz(V - V_D) = 0.$$

C'est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à yOz ou P_A et qui est de révolution. Il passe par B, C, D. La cinquième équation donne un cylindre perpendiculaire à P_B. La sixième donnerait une surface du troisième degré, mais on peut la laisser de côté, car en introduisant le point C on aurait un troisième cylindre perpendiculaire à P_C. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère l'ensemble des*

dix points de Cayley d'une surface S_9 *quand on met de côté trois de ces points, les sept autres sont sur trois cylindres de révolution dont les axes sont perpendiculaires aux plans de Cayley qui correspondent aux trois premiers points. Ces trois plans forment habituellement un trièdre, sinon ils passent par une même droite* Δ *: la propriété subsiste et les trois cylindres sont alors orthogonaux à* Δ.

Dans l'exemple numérique de M. Darboux que je vais donner, ce fait se produit quatre fois sur les cent vingt combinaisons des plans pris trois à trois.

Exemple de M. Darboux : Axes rectangulaires. — Je prends

A_1 :	1	0	0	P_1 :		$y+z=0,$
A_2 :	0	1	0	P_2 :		$z-x=0,$
A_3 :	0	0	1	P_3 :		$x+y=0.$

On trouve alors :

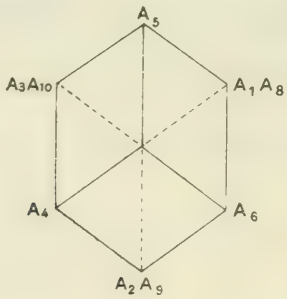
A_4 :	-1	0	0	P_4 :		$y-z=0,$
A_5 :	0	-1	0	P_5 :		$z-x=0,$
A_6 :	0	0	-1	P_6 :		$x-y=0,$
A_7 :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	P_7 :		$x+y+z-\frac{1}{2}=0,$
A_8 :	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	P_8 :		$x-y-z-\frac{1}{2}=0,$
A_9 :	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	P_9 :		$-x+y-z-\frac{1}{2}=0,$
A_{10} :	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	P_{10} :		$-x-y+z-\frac{1}{2}=0.$

Les plans sont identiques à ceux de M. Darboux ; les trois premiers points sont symétriques par rapport à l'origine. Si j'envisage les cent vingt combinaisons des

dix plans trois à trois, je trouve seulement quatre faux trièdres, c'est-à-dire quatre systèmes de trois plans passant par une droite Δ, savoir :

P_1	P_2	P_6	qui passent par	$x = y = -z$.
P_1	P_3	P_5	»	$z = x = -y$.
P_2	P_3	P_4	»	$y = z = -x$.
P_4	P_5	P_6	»	$x = y = z$.

On peut projeter les dix points suivant les sommets



et le centre d'un hexagone régulier, comme l'indique la figure.

	A_7		a pour cote	h,
A_8	A_9	A_{10}	»	$\frac{h}{3}$,
A_1	A_2	A_3	»	$\frac{5h}{6}$,
A_4	A_5	A_6	»	$\frac{h}{6}$.

Mais ici la surface S_9 se décompose en trois cylindroïdes :

$$x(y^2 + z^2) - yz = 0,$$
$$y(z^2 + x^2) + zx = 0,$$
$$z(x^2 + y^2) + xy = 0.$$

Les dix points sont communs aux cylindroïdes symétriques des premiers par rapport à l'origine.

LES MOUVEMENTS A SURFACES DE STEINER DE M. DARBOUX.

Après avoir établi tous ces résultats, j'ai eu l'occasion de lire un Mémoire de M. Darboux sur les mouvements algébriques qui se trouve à la fin de la *Cinématique* de M. Kœnigs. L'éminent géomètre, après avoir défini un certain mouvement d'un corps solide à deux paramètres, se propose de chercher s'il n'existe pas des points du corps qui décrivent des plans. Il démontre que, dans le cas le plus général, il doit en exister dix; c'est précisément le nombre que je trouve pour mes points de Cayley. J'ai cherché si les dix points de M. Darboux ne pouvaient pas être construits comme les miens, et je suis arrivé aux mêmes résultats. Le mouvement étudié par M. Darboux résulte du renversement d'un corps fixe autour d'une droite passant par l'origine, plus une translation. On peut remplacer ceci par un renversement autour d'une droite Δ parallèle à la première, plus une translation parallèle à Δ. Au lieu de laisser les deux paramètres indépendants, on peut les lier par une relation telle que la translation soit nulle. Alors Δ décrit une des surfaces S_9 que j'étudie.

Réciproquement, soient Σ le solide formé par l'ensemble des points de Cayley et Σ' le solide symétrique de Σ par rapport aux génératrices d'une S_9; il est clair qu'il y aura dix points de Σ' qui décriront des courbes planes : ce sont les points de M. Darboux. Ces points sont identiques aux miens; les plans sont placés de façon un peu différente, mais jouissent de propriétés analogues. Je vais me permettre de reprendre les calculs de M. Darboux d'une façon un peu différente, de manière à mettre en évidence la construction géométrique des points quand on connaît trois d'entre eux et les

plans correspondants, construction qui n'est pas indiquée dans le Mémoire que j'indique (*Cinématique* de Kœnigs, p. 363).

J'appelle encore φ, φ', φ'' les angles des axes et je pose pour abréger

$$\left\{\begin{aligned} P &= \lambda + \mu\cos\varphi'' + \nu\cos\varphi', \\ Q &= \lambda\cos\varphi'' + \mu + \nu\cos\varphi, \\ R &= \lambda\cos\varphi' + \mu\cos\varphi + \nu. \end{aligned}\right.$$

J'appelle xyz le point de la figure fixe, $x'y'z'$ le point correspondant de la figure mobile. Les formules que je vais écrire définissent une translation, plus un renversement :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{f_1(\lambda\mu\nu) + x(\lambda P + \mu Q + \nu R) - 2\lambda Q y + 2\lambda R z}{\lambda P + \mu Q + \nu R}, \\ y' &= \frac{f_2(\lambda\mu\nu) + y(\mu Q + \nu R + \lambda P) - 2\mu R z + 2\mu P x}{\lambda P + \mu Q + \nu R}, \\ z' &= \frac{f_3(\lambda\mu\nu) + z(\nu R + \lambda P + \mu Q) - 2\nu P x + 2\nu Q y}{\lambda P + \mu Q + \nu R}, \end{aligned}\right.$$

où

$$f_i = a_i\lambda^2 + a'_i\mu^2 + a''_i\nu^2 + 2b_i\mu\nu + 2b'_i\lambda\nu + 2b''_i\lambda\mu.$$

J'écris que

$$lx' + my' + nz' + p = 0,$$

quels que soient λ, μ, ν. J'ai ainsi six équations; j'en écrirai deux, les autres s'en déduisent par permutations sur xyz, $\varphi\varphi'\varphi''$ et les accents pour les lettres a, b, ainsi que les indices :

$$\begin{aligned} &l(a_1 + x + 2y\cos\varphi'' + 2z\cos\varphi') \\ &\qquad + m(a_2 + y) + n(a_3 + z) + p = 0, \\ &l(b_1 + x\cos\varphi) + m(b_2 + z + x\cos\varphi') \\ &\qquad + n(b_3 + x\cos\varphi'' + y) + p\cos\varphi = 0. \end{aligned}$$

J'exprime que le point qui correspond à $x = \alpha$, $y = \lambda$, $z = \gamma$ décrit le plan $x = 0$; celui qui correspond à $\alpha'\beta'\gamma'$: $y = 0$, et celui qui correspond à $\alpha''\beta''\gamma''$: $z = 0$. En posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
U &= x + y\cos\varphi'' + z\cos\varphi',\\
V &= x\cos\varphi'' + y + z\cos\varphi,\\
W &= x\cos\varphi' + y\cos\varphi + z,\\
U_A &= \alpha + \beta\cos\varphi'' + \gamma\cos\varphi',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

j'ai les six équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
2l(U - U_A) &= l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p,\\
2m(V - V_B) &= l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p,\\
2n(W - W_C) &= l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p,\\
m(W - W_B) + n(V - V_C) &= \cos\varphi\,[l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p],\\
n(U - U_C) + l(W - W_A) &= \cos\varphi'\,[l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p],\\
l(V - V_A) + m(U - U_B) &= \cos\varphi''\,[l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p].
\end{aligned}\right.$$

D'où facilement

$$\frac{W - W_B}{V - V_B} + \frac{V - V_C}{W - W_C} = 2\cos\varphi,$$

cylindre de révolution à génératrices perpendiculaires au plan des yz. C'est l'équation déjà trouvée.

Il y a une discussion analogue que je ne refais pas.

SURFACES DE STEINER.

Je reprends les axes rectangulaires, je me donne un point xyz et je cherche les coordonnées du symétrique $x'y'z'$ par rapport à la droite Δ définie comme d'habi-

tude par ses six coordonnées

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad L,\quad M,\quad N,\qquad \rho = NY - MZ,\qquad \ldots,$$

$$x' = \frac{2\rho - x(X^2 - Y^2 - Z^2) + 2yXY + 2zXZ}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y' = \frac{2\rho' - y(Y^2 - Z^2 - X^2) + 2zYZ + 2xYX}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z' = \frac{2\rho'' - z(Z^2 - Y^2 - X^2) + 2xZX + 2yYZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Il suffit de poser

$$2\rho = f_1(XYZ),$$
$$2\rho' = f_2(XYZ),$$
$$2\rho'' = f_3(XYZ)$$

pour retrouver les formules (12) en axes rectangulaires; mais pour cela il faut que

$$(13)\qquad Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0,$$

c'est-à-dire qu'au lieu de traiter X, Y, Z comme indépendantes, il faut les lier par la relation (13) qui représente le cône directeur de la S_9.

Du reste, étant donnée une surface S_9, si d'un point $\alpha\beta\gamma$ on abaisse des perpendiculaires sur la génératrice XYZLMN, le pied a pour coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\rho + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},\\ y &= \frac{\rho' + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},\\ z &= \frac{\rho'' + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \end{aligned}\right.$$

Or, sur la surface, on a des équations de la forme

$$\rho = -\Phi_1(XYZ),\qquad \rho' = -\Phi_2,\qquad \rho'' = -\Phi_3;$$

donc la courbe décrite par le pied de la perpendiculaire abaissée de $\alpha\beta\gamma$ sur les génératrices se trouve tracée

sur la surface de Steiner :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{-\Phi_1 + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ y &= \frac{-\Phi_2 + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z &= \frac{-\Phi_3 + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \end{aligned}\right.$$

où l'on traite X, Y, Z comme indépendantes. Ceci donne une nouvelle propriété des surfaces S_9.

Dans un prochain article, j'étudierai les S_6 qui possèdent une sextique de Cayley et les hyperboloïdes pour lesquels la sextique se décompose en six droites. Enfin j'étudierai les surfaces développables qui possèdent une infinité de points de Cayley ou, ce qui revient au même, les courbes gauches qui possèdent une infinité de podaires planes. On peut les déterminer facilement sans signe de quadrature.

[119c]

SUR UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. TSURUICHI HAYASHI, à Tokio.

I. A.-M. Legendre a établi dans sa *Théorie des Nombres* qu'un nombre triangulaire ne peut être égal à un cube. Il s'appuie pour cela sur l'impossibilité démontrée par lui, l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = 3z^3. \tag{1}$$

J'établirai ici que *le quadruple d'un nombre pyramidal ne saurait être un cube*, en me servant de la même équation.

On aurait une démonstration assez simple en appliquant la condition de possibilité, trouvée par Édouard Lucas, de l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = A z^3 \quad (^1).$$

J'aurai recours à une méthode plus directe, qui me semble présenter un certain intérêt.

II. Supposons que l'équation (1) soit possible; alors $x + y$ est divisible par 3, car on a

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3(x^2 y + xy^2) = 3(z^3 + x^2 y + xy^2).$$

Posons

$$x + y = 3k.$$

On a

$$(2) \quad x^3 + y^3 = x^3 + (3k - x)^3 = 27k^3 - 27k^2 x + 9kx^2.$$

$3z^3$ est donc divisible par 9, et, par suite, z est divisible par 3.

Posons

$$(3) \qquad z = 3^p h,$$

l'exposant p étant $\geqq 1$, et h premier à 3.

Les nombres x, y, z peuvent être supposés premiers entre eux deux à deux ; x et y sont donc premiers à 3. On a, en vertu de l'égalité (2),

$$qk(3k^2 - 3kx - x^2) = 3z^3.$$

Si donc on pose

$$(4) \qquad 3z^3 = qkk',$$

k' est premier à 3, puisque x l'est aussi. Or on a, d'après (3),

$$3^{3p+1} h^3 = q\,kk'.$$

---

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, 1878, p. 425.

k est donc divisible par 3^{3p-1}. Posons

$$k = 3^{3p-1} l \qquad (l \text{ premier à } 3).$$

Il en résulte

$$h^3 = lk'.$$

Remarquons, en outre, que x est premier à k, à cause de

$$x + y = 3k.$$

Par suite, en vertu de

$$k' = 3k^2 - 3kx + x^2,$$

k' est premier à k et, par suite, à l. On doit donc avoir

$$l = l_1^3, \qquad k' = k_1^3,$$

l_1 et k_1 étant premiers entre eux et premiers chacun à 3. On a donc finalement

$$x^3 + y^3 = 3.3kk' = 3.3^{3p} l_1^3 k_1^3,$$
$$x + y = 3k = 3^{3p} l_1^3, \qquad z = 3^p l_1 k_1.$$

Et d'après le résultat obtenu par Legendre et rappelé plus haut, nous pouvons affirmer qu'il est impossible de trouver pour x, y, z, p, l_1, k_1 des valeurs entières qui satisfassent les équations précédentes.

III. On peut écrire

$$x^3 + y^3 = 3.3kk' = 3(x + y)k_1^3,$$

d'où

$$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy = 9k^2 - 3x(3k - x) = 3k_1^3,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2x - 3k)^2 + 3k^2 = 4k_1^3.$$

L'équation précédente sera satisfaite si l'on pose

$$2x - 3k = 2X(9Y^2 - X^2),$$
$$k = 6Y(Y^2 - X^2),$$
$$k_1 = X^2 + 3Y^2,$$

où X et Y sont des entiers arbitraires. Or on devrait avoir, comme on l'a vu,

$$3k = 3^3 p l_1^3.$$

Prenons, par exemple, $p = 1$. On aura

$$(7) \qquad 3k = 18\,Y(Y^2 - X^2) = 3^3 l_1^3.$$

D'autre part, on trouve aisément

$$x = 9Y(Y^2 - X^2) + X(9Y^2 - X^2),$$
$$y = 9Y(Y^2 - X^2) - X(9Y^2 - X^2),$$
$$z = 3l_1 k_1 = 3l_1(X^2 - 3Y^2).$$

On voit donc que, si l'équation (7) était possible, on pourrait trouver trois nombres x, y, z, déterminés par les formules précédentes, et tels que

$$x^3 + y^3 = 3z^3.$$

Or, cette dernière équation est démontrée impossible. Il en est donc de même de l'équation (7).

IV. L'équation (7) peut s'écrire

$$4\frac{(Y - X)X(Y + X)}{6} = l_1^3,$$

ou, en posant

$$Y - X = \alpha, \qquad X = \beta,$$

$$4\frac{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{6} = l_1^3.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le quadruple d'un nombre de la forme

$$\frac{\alpha(\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta)}{6}$$

ne peut être un cube.

En particulier, le quadruple d'un nombre pyramidal $\frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{6}$ *ne peut être un cube.*

[C2j]

SUR LES FORMULES DE QUADRATURE DE COTES. GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE D'EULER;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Les formules de Cotes (*Nouvelles Annales*, 1909, p. 291)

$$(1)\qquad S = h\,\frac{y_0 + y_1}{2},$$

$$(2)\qquad S = h\,\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6},$$

$$(3)\qquad S = h\,\frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8},$$

$$(4)\qquad S = h\,\frac{7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4}{90},$$

$$\ldots\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donnent une valeur approchée de l'aire comprise entre l'axe des x, une courbe *quelconque* $y = f(x)$, et deux ordonnées correspondant aux abscisses x et $x + h$. L'expression de l'erreur commise par l'emploi de chacune de ces formules peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1')\qquad \frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

$$(2')\qquad -\frac{h^5}{2880} f^{\text{IV}}(\xi),$$

$$(3')\qquad \frac{h^5}{6480} f^{\text{IV}}(\xi),$$

$$(4')\qquad -\frac{h^7}{1935360} f^{\text{VI}}(\xi),$$

$$\ldots\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

la lettre ξ désigne une valeur comprise entre x et $x+h$.

Les expressions (1′) et (2′) se trouvent dans les *Leçons d'Algèbre* de M. Tannery.

La remarque de Catalan, généralisée par Maleyx, devait faire prévoir que les expressions (2′), (4′), ... *renfermeraient* h^5, h^7, ..., *au lieu de* h^4, h^6, ...

II.

2. A la formule (1) et à l'expression (1′) du reste se rattache une formule due à Euler, retrouvée d'ailleurs par Maclaurin à qui on l'a longtemps attribuée. La notation $F(x)$ désignant une fonction primitive de $f(x)$, on a

$$(1'')\quad F(\beta)-F(\alpha)=h\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-\frac{B_1 h^2}{1.2}[f'(\beta)-f'(\alpha)]$$
$$+\frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}[f''(\beta)-f''(\alpha)]+\ldots$$
$$-(-1)^n\frac{B_n h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(\beta)-f^{2n-1}(\alpha)]$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-3}}{(2n+2)!}f^{2n+2}(\xi);$$

l'expression du reste est due à Malmsten. Les B sont les nombres de Bernoulli, et l'on a, pour $n=1$,

$$F(\beta)-F(\alpha)=h\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-\frac{h^2}{12}[f'(\beta)-f'(\alpha)]$$
$$+\frac{h^5}{720}f^{(4)}(\xi).$$

3. Ayant observé que *la forme de la formule d'Euler est liée au fait qu'elle se reproduit quand on échange* α *et* β, j'ai eu l'idée de chercher une formule analogue en prenant comme point de départ la

formule (2). On trouve

$$(2'') \qquad F(\beta) - F(\alpha) = h\,\frac{f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta)}{6}$$
$$- \frac{h^4}{2880}\left[f'''(\beta) - f'''(\alpha)\right]$$
$$+ \frac{h^6}{96\,768}\left[f^{v}(\beta) - f^{v}(\alpha)\right]$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut, comme pour la formule d'Euler, déterminer les coefficients numériques en prenant

$$F(x) = e^x;$$

on trouve

$$\frac{e^h + 4\,e^{\frac{h}{2}} + 1}{6}\,\frac{h}{e^h - 1} - 1 = \frac{h^4}{2880} - \frac{h^6}{96\,768} + \ldots,$$

et l'on est ramené à former le développement du premier membre.

On aurait de même

$$(3'') \quad F(\beta) - F(\alpha) = h\,\frac{f(\alpha) + 3f\left(\alpha + \frac{h}{3}\right) + 3f\left(\alpha + \frac{2h}{3}\right) + f(\beta)}{8}$$
$$- \frac{h^4}{6480}\left[f'''(\beta) - f'''(\alpha)\right] + \ldots.$$

4. La formule ($4''$) aurait, après le terme en h, un terme en h^6, et il en serait de même de la formule ($5''$); etc.

La forme de ces formules ne permet, après le terme en h, que des termes de degré pair en h; c'est ainsi que les formules ($2''$), ($4''$), ... ne peuvent avoir de termes en h^3, h^5, ...; et l'on comprend ainsi que les expressions ($2'$), ($4'$), ..., au lieu de contenir h^4, h^6, ..., avec f''', f^{v}, ..., contiennent h^5, h^7, ..., avec f^{iv}, f^{vi}, ...; on voit dès lors que la formule (2) est exacte pour un polynome du troisième degré, aussi bien que la for-

mule (3), que de même la formule (4) est exacte pour un polynome du cinquième degré, aussi bien que la formule (5), etc.

[H12d]

SUR LES SUITES RÉCURRENTES;

PAR M. AMSLER,
Professeur au Collège de Dieppe.

---

1. Soit $\varphi(x)$ un polynome qui soit au plus de degré $m-1$; soit $f(x)$ un polynome de degré m premier avec $\varphi(x)$ et égal au produit de m facteurs binomes différents :

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

On peut poser

$$(1) \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

A, B, ..., L étant des constantes.

Sous la réserve que x soit supérieur en module aux quantités telles que a, on peut développer les deux membres suivant les puissances décroissantes de x. Nous égalons les coefficients des puissances de x dans les deux membres après avoir posé

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x^2} + \ldots + \frac{u_n}{x^{n+1}} + \ldots$$

et remarqué qu'on a

$$\frac{A}{x-a} = A\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots\right).$$

Nous obtenons ainsi les équations

$$\begin{aligned}
u_0 &= A + B + \ldots + L,\\
u_1 &= Aa + Bb + \ldots + Ll,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= Aa^n + Bb^n + \ldots + Ll^n.
\end{aligned}$$

On sait d'ailleurs calculer les constantes telles que A, par exemple :

$$A = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}.$$

Nous allons étudier la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_3, \ldots$ dont l'échelle de récurrence est $f(x)$. Plus spécialement, nous allons établir une formule d'addition pour les u :

2. *Forme symbolique de a^n.* — Considérons les m équations suivantes, où les inconnues sont les Aa^n :

$$\begin{aligned}
u_n &= Aa^n + Bb^n + \ldots + Ll^n,\\
u_{n+1} &= aAa^n + bBb^n + \ldots + lLl^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{n+m-1} &= a^{m-1}Aa^n + b^{m-1}Bb^n + \ldots + l^{m-1}Ll^n.
\end{aligned}$$

Imaginons que les indices des u soient portés en exposants.

Formons une combinaison linéaire des équations au moyen des coefficients du polynome

$$(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Dans la combinaison, l'inconnue Aa^n demeure seule et l'on a symboliquement

$$Aa^n = \frac{(u-b)(u-c)\ldots(u-l)u^n}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}$$

ou, en se rappelant la valeur de A,

$$a^n = \frac{(u-b)(u-c)\ldots(u-l)}{\varphi(a)}u^n.$$

Cette formule s'interprète de la façon suivante : on effectue le second membre et l'on met en indices les exposants des u.

3. *Addition des u.* — Posons

$$a^n = \frac{(u-b)(u-c)\ldots(u-l)}{\varphi(a)} u^n,$$

$$a^{n'} = \frac{(v-b)(v-c)\ldots(v-l)}{\varphi(a)} v^{n'}.$$

v étant une lettre qui remplace u pour les besoins du calcul.

On a

$$a^{n+n'} = \frac{(u-b)(u-c)\ldots(u-l)(v-b)(v-c)\ldots(v-l)}{[\varphi(a)]^2} u^n v^{n'}.$$

Pour calculer $u_{n+n'}$, il faut former

$$\sum A a^{n+n'} = \sum \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} a^{n+n'}$$

$$= u^n v^{n'} \sum \frac{(u-b)\ldots(u-l)(v-b)\ldots(v-l)}{(a-b)\ldots(a-l)\varphi(a)}.$$

Je dis que le Σ n'est autre que le polynome

$$\pi(u, v) = \frac{f(u)\,P(v) - f(v)\,P(u)}{u-v},$$

où l'on a posé

$$P(u) = \sum \frac{(u-b)(u-c)\ldots(u-l)}{(a-b)\ldots(a-l)\varphi(a)}.$$

En effet, $\pi(u, v)$ et le Σ à deux variables u et v peuvent être regardés comme deux polynomes en u; ils sont tous deux au plus de degré $m-1$: il suffit alors de prouver qu'ils coïncident pour les m valeurs a, b, $c, \ldots, l$. Si, dans le Σ on fait $u = a$, on trouve

$$\frac{(v-b)(v-c)\ldots(v-l)}{\varphi(a)}.$$

Si dans π on fait $u = a$, on trouve

$$\frac{(v-b)\ldots(v-l)}{\varphi(a)},$$

résultat identique au premier.

Reste à indiquer le calcul pratique de $P(u)$; pour cela je remarque que

$$P(a) = \frac{1}{\varphi(a)}$$

Donc $P(x)$ est le polynome que fournit l'identité d'Euler relative aux polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ que nous avons supposés au début premiers entre eux :

$$P(x)\varphi(x) + Q(x)f(x) = 1,$$

P étant de degré inférieur à $f(x)$ et Q de degré inférieur à φ.

On sait trouver par une suite d'opérations rationnelles le polynome $P(x)$, et cette identité fournit bien la substitution

$$P(a) = \frac{1}{\varphi(a)},$$

puisque $f(a) = 0$.

On a donc la formule d'addition

$$U_{n+n'} = u^n v^{n'} \frac{f(u)P(v) - f(v)P(u)}{u - v}.$$

Quand le second nombre de cette formule est effectué, on met en indices les exposants des u et des v, puis seulement alors on remplace partout v par u.

4. *Exemple de suite récurrente.* — On part des nombres 1 et 3 en formant un nouveau terme par l'addition des deux derniers termes formés. On veut étu-

dier les propriétés d'addition de la suite ainsi formée :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 3, \qquad u_2 = 4, \qquad \ldots.$$

L'échelle de récurrence est ici $x^2 - x - 1$, puisqu'on a

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

Donc

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

Déterminons $\varphi(x)$ par la condition que

$$\frac{\varphi(x)}{x^2 - x - 1} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \ldots.$$

On trouve facilement que

$$\varphi(x) = x + 2.$$

On cherche donc l'identité d'Euler relative à $x + 2$ et $x^2 - x - 1$. On a par la division

$$x^2 - x - 1 = (x + 2)(x - 3) + 5.$$

d'où l'identité

$$\frac{x^2 - x - 1}{5} + \frac{3 - x}{5}(x - 2) = 1,$$

d'où

$$P(x) = \frac{3 - x}{5},$$

et l'on a, pour l'addition,

$$u_{n+n'} = u^n v^{n'} \frac{(u^2 - u - 1)(3 - v) + (v^2 - v - 1)(3 - u)}{5(u - v)},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+n'} = u^n v^{n'} \frac{3(u - v) + uv - 4}{5}.$$

Soit par exemple $n = 2$, $n' = 5$; on aura

$$u_{2+5} = u_7 = \frac{(3u_3u_5 - u_2u_6) + u_3u_6 - 4u_2u_5}{5}$$

$$= \frac{3(7 \times 18 + 4 \times 29) + 7 \times 29 - 4 \times 4 \times 18}{5} = 47.$$

Pour cette suite la formule de duplication serait

$$u_{2n} = \frac{6u_n u_{n+1} - u_{n+1}^2 - 4u_n^2}{5}.$$

Les formules d'addition ainsi déterminées peuvent servir à étudier la décomposition en facteurs des termes de la suite, à calculer des termes lointains de la suite sans passer par les termes intermédiaires [1] (*cf.* sur $\frac{1}{f(x)}$ l'article de juillet 1907).

On remarquera qu'étant donnés les $p-1$ premiers termes d'une suite d'ordre p dont on connaît l'échelle de récurrence $f(x)$, on sait trouver $\varphi(x)$ et résoudre par l'intermédiaire de $P(x)$ le problème de l'addition.

QUESTIONS.

2144. — La droite d'Euler d'un triangle ABC (droite qui joint l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit) coupe les côtés aux points D, E, F. Les trois cercles de diamètres respectifs AD, BE, CF ont en commun un point K qui appartient au cercle des neuf points du triangle. Démontrer que la distance du point K au pied de l'une des hauteurs est égale à la somme de ses distances aux pieds des deux autres hauteurs.

(V. Thébault.)

2145. — Si l'on pose [2]

$$x = \frac{a + b\sqrt{5} + c\sqrt{-5} + d\sqrt{15}}{\sqrt{2}}.$$

a, b, c, d étant entiers, a et c étant de même parité :

1° Les nombres x sont des entiers algébriques;

---

(1) *Voir* mon article, *Sur les propriétés d'addition d'une suite récurrente considérée par D. Bernoulli* (*Nouv. Ann.*, 1907, p. 297).

(2) Cf. *Nouvelles Annales*, 1903, p. 214.

2° La somme ou le produit de deux nombres x est un nombre x;

3° La norme du nombre x (c'est-à-dire le produit de ce nombre par ceux qu'on obtient en changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$, ou $\sqrt{-5}$ en $-\sqrt{-5}$, ou en faisant ces deux changements à la fois) est

$$X = \left(\frac{a^2 - 2b^2 + 5c^2 - 10d^2}{2}\right)^2 + 10(ad - bc)^2;$$

4° La norme du produit de deux facteurs est le produit des normes de ces facteurs;

5° Étant donnés deux nombres de la forme indiquée, peut-on trouver un nombre de même forme $\frac{m + n\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}$ appelé *quotient*, et un autre nombre de même forme $\frac{r + s\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}}$ appelé *reste*, tels qu'on ait

$$\frac{a + b\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} = \frac{e + f\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m + n\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}} + \frac{r + s\sqrt{2} + \ldots}{\sqrt{2}},$$

tels de plus que la norme du reste soit inférieure à celle du diviseur? (G. Fontené.)

2146. — On considère la conchoïde centrale de la podaire centrale de l'ellipse E (axes $2a$ et $2b$), obtenue en augmentant ou diminuant les rayons vecteurs de la podaire de la longueur k. Si A désigne l'aire de la podaire et s le périmètre de l'ellipse E, on a pour les aires de chacune des deux courbes constituant la conchoïde

$$U_1 = A + \pi k^2 - ks \qquad \left[A = \pi\frac{(a^2 + b^2)}{2}\right].$$
$$U_2 = A - \pi k^2 - ks$$

(E.-N. Barisien.)

[O¹4f]

SUR LES SURFACES RÉGLÉES RAPPORTÉES A LEURS ASYMPTOTIQUES;

PAR M. H. VILLAT.

Dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*, M. Darboux signale, à propos des surfaces à lignes de courbures planes, l'intérêt que présentent des formules propres à représenter une surface réglée rapportée à ses asymptotiques (Darboux, t. IV, p. 214). Il cite à ce propos une Note de M. Kœnigs, où celui-ci a obtenu de telles formules, entièrement débarrassées de tout signe de quadratures. On trouvera dans ce qui va suivre des formules tout à fait différentes de celles de M. Kœnigs, et qui, bien que comportant encore des signes de quadratures, sont peut-être susceptibles de rendre service, vu leur très grande simplicité.

On sait qu'une surface quelconque, rapportée à ses lignes asymptotiques, peut être représentée par des équations de la forme suivante (éq. de M. Lelieuvre),

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \int \left(F_2 \frac{\partial F_3}{\partial u} - F_3 \frac{\partial F_2}{\partial u}\right) du - \left(F_2 \frac{\partial F_3}{\partial v} - F_3 \frac{\partial F_2}{\partial v}\right) dv, \\ y &= \int \left(F_3 \frac{\partial F_1}{\partial u} - F_1 \frac{\partial F_3}{\partial u}\right) du - \left(F_3 \frac{\partial F_1}{\partial v} - F_1 \frac{\partial F_3}{\partial v}\right) dv, \\ z &= \int \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial u} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial u}\right) du - \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial v} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial v}\right) dv, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions F_1, F_2, F_3 sont trois fonctions des deux variables u et v, assujetties à être toutes trois solutions d'une même équation de Laplace à invariants égaux, de la forme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v} = kF.$$

Cherchons à déterminer le choix des fonctions F convenant à une surface réglée. Supposons que les droites de la surface soient, dans les formules (1), les courbes $v = \text{const.}$ Appelons p, q, -1 les quantités, fonctions de v, qui dirigent une de ces droites; si nous observons, comme il est bien connu, que les cosinus directeurs de la normale à la surface sont proportionnels à F_1, F_2, F_3, nous devrons tout d'abord avoir la condition suivante, au moins nécessaire,

$$F_3 = pF_1 + qF_2, \tag{2}$$

qui exprime qu'une droite de la surface est dans le plan tangent; d'ailleurs, cette condition est aussi suffisante.

En effet, si cette condition est remplie, tout le long de l'une des courbes $v = \text{const.}$, la normale à la surface sera perpendiculaire à une direction fixe p, q, -1; donc cette courbe sera la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface, parallèlement à cette direction. Et comme, de plus, nous savons que la courbe est une asymptotique, son plan osculateur devra être toujours parallèle à cette direction. Donc, ou bien ce plan osculateur est fixe, et la courbe est plane, dans un plan parallèle à cette direction; mais alors la surface est une surface développable, enveloppe du plan en question; ou bien ce plan osculateur est indéterminé, et alors la courbe est une droite parallèle à la direction p, q, -1, et la surface est réglée.

Donc, en exceptant le cas des surfaces développables exclu déjà, d'ailleurs, dans les formules (1), la condition (2) sera nécessaire et suffisante pour que les formules (1) représentent une surface réglée.

Nous allons maintenant faire voir que la condition (2) entraîne, entre autres conséquences, que

l'équation de Laplace à laquelle satisfont les F est une équation du second rang; les solutions de cette équation seront donc connues.

A cause de l'équation (2), on a par dérivation

$$\frac{\partial F_3}{\partial u} = p\frac{\partial F_1}{\partial u} + q\frac{\partial F_2}{\partial u},$$

puis, par une nouvelle dérivation par rapport à v, et tenant compte de l'équation du second ordre à laquelle satisfont les F,

$$0 = \frac{dp}{dv}\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{dq}{dv}\frac{\partial F_2}{\partial u},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = g(v)\frac{\partial F_1}{\partial u}.$$

D'où, en dérivant deux fois et tenant compte toujours de la même équation,

$$(3) \qquad \frac{d\log g}{dv}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial F_1}{\partial u}\right) = 0.$$

Laissons de côté le cas où g serait constant, auquel cas la surface étudiée se réduirait à une droite, F_1 et F_2 ne différant alors que par un facteur constant. L'équation (3) développée devient

$$(4) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} - \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{k}}{\partial u} = 0.$$

puis, en dérivant de nouveau, par rapport à v et simplifiant,

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{k}\right)}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial u}\times\left(1 - \frac{\partial^2\frac{1}{k}}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

Maintenant, les équations (4) et (5) nous permettent

d'éliminer F_1. On a de suite

$$\frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\partial v}}{\dfrac{1}{k}} = \frac{\dfrac{\partial^2\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\partial u}} - 1,$$

ce qui se met immédiatement sous la forme

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \log k}{\partial v\,\partial u} = k,$$

ce qui exprime évidemment que l'équation à laquelle satisfont les F est bien du second rang. Cette équation pourra donc être intégrée par l'application de la méthode de Laplace.

Tout d'abord, l'équation (6) se ramène à l'équation de Lionville en prenant $\log k$ comme inconnue. On en conclut, d'après un résultat bien connu, que l'intégrale générale de l'équation (6) est

$$k = \frac{2\,U'\,V'}{(U+V)^2},$$

en désignant par U et V deux fonctions arbitraires, respectivement de u et de v.

L'équation du second ordre, dont les trois fonctions F sont solutions, est dès lors la suivante :

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\,U'\,V'}{(U+V)^2}\,F.$$

L'intégrale générale de cette équation est (*cf.* Darboux, *Théorie des surfaces*, § 395)

$$F = \frac{2(U_1+V_1)}{U+V} - \frac{U'_1}{U'} - \frac{V'_1}{V'},$$

U_1 et V_1 désignant deux nouvelles fonctions arbitraires respectivement de u et de v.

Au surplus, il est extrêmement facile de retrouver ce résultat élémentairement.

Faisons, en effet, dans l'équation (7) la transformation de Laplace

$$\frac{\partial F}{\partial v} = G. \tag{8}$$

L'élimination de F nous donne de suite pour G l'équation

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2V'}{U+V} - \frac{V''}{V'}\right) - 2\frac{U'V'}{(U+V)^2}G = 0,$$

laquelle prend la forme simple

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial G}{\partial v} + G\left(\frac{2V'}{U+V} - \frac{V''}{V'}\right)\right] = 0.$$

D'où, en désignant par V_2 une fonction arbitraire de v, l'équation linéaire

$$\frac{\partial G}{\partial v} + G\left(\frac{2V'}{U+V} - \frac{V''}{V'}\right) = V_2,$$

dont la solution est

$$G = \frac{V'}{(U+V)^2}\left(K - \int V_2 \frac{(U+V)^2}{V'}\,dv\right),$$

K désignant la constante de l'intégration, c'est-à-dire une fonction arbitraire de u.

Il suffit maintenant de poser

$$\frac{V_2}{V'} = V_3,$$

puis successivement

$$V_3 V' = V_4 \qquad \text{et} \qquad V_4 V' = V_5,$$

pour que les intégrales $\int V_3' U^2\,dv$, $\int V_3 U V\,dv$,

$\int V'_3 V^2 dv$, qui figurent dans l'expression de G, s'effectuent toutes trois par parties. Une fois G obtenu, on en conclura F par la relation $\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2U'V'}{(U+V)^2} \times F$ déduite de (7) et (8), et, à la notation près, on retombera sur l'expression de F déjà signalée.

Nous sommes maintenant assurés de la forme nécessaire des trois fonctions F qui doivent figurer dans les formules (1). Avant d'aller plus loin, observons qu'il est permis, sans rien changer à la surface, de remplacer les paramètres u et v par les fonctions U et V des mêmes paramètres. Nous pouvons dès lors prendre pour F_1, F_2, F_3 les valeurs suivantes :

$$F_1 = \frac{2(U_1 - V_1)}{u - v} - U'_1 - V'_1,$$

$$F_2 = \frac{2(U_2 - V_2)}{u - v} - U'_2 - V'_3.$$

$$F_3 = \frac{2(U_3 - V_3)}{u - v} - U'_3 - V'_3.$$

Mais il n'est pas certain que ces expressions satisfassent à la condition (2). Voyons tout d'abord si elles vérifient la condition (3), que nous avions déduite de (2). Ceci nous donne

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{(u+v)^2 \times \left[2\frac{U_1 + V_1}{(u+v)^2} - 2\frac{U'_1}{u+v} - U''_1\right]\right\} = 0$$

ou, en réduisant,

$$U'''_1 = 0.$$

De sorte que U_1 devra être un polynome du second degré ; il en sera naturellement de même pour U_2 et U_3, à cause de la symétrie. Nous poserons

$$U_1 = a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1,$$
$$U_2 = a_2 u^2 + 2b_2 u + c_2,$$
$$U_3 = a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3.$$

Il viendra ensuite

$$F_1 = \frac{2}{u+v}(V_1 - a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1) - V'_1 - 2a_1 u - 2b_1,$$

ce qu'on mettra facilement sous la forme

$$F_1 = \frac{2}{u+v}(V_1 - a_1 v^2 - 2b_1 v + c_1) - (V'_1 + 2a_1 v - 2b_1).$$

On voit alors qu'il suffira de poser

$$V_1 + a_1 v^2 - 2b_1 v + c_1 = W_1,$$

pour obtenir

$$F_1 = \frac{2W_1}{u+v} - W'_1.$$

Naturellement, on aura de même

$$(9) \qquad F_2 = \frac{2W_2}{u+v} - W'_2,$$

$$F_3 = \frac{2W_3}{u+v} - W'_3,$$

les fonctions W étant trois fonctions absolument quelconques de v.

Il est maintenant facile de s'assurer que les expressions trouvées finalement pour F_1, F_2, F_3 satisfont bien à une relation de la forme (2); les quantités p et q (fonctions de v) seront définies par les équations

$$W_3 = pW_1 + qW_2,$$
$$W'_3 = pW'_1 + qW'_2.$$

De sorte qu'il ne reste plus qu'à transporter les expressions (9) des F dans les formules (1) pour obtenir les formules cherchées, convenant à toute surface réglée rapportée à ses asymptotiques.

Nous obtenons ainsi, par un calcul immédiat,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{2W}{(u+v)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{2W}{(u+v)^2} + \frac{2W'}{u+v} - W'',$$

puis

$$dx = \frac{2}{(u+v)^2}(W_3 W'_2 - W_2 W'_3)\,du$$

$$+ \frac{2}{(u-v)^2}(W_3 W'_2 - W_2 W'_3)\,dv$$

$$+ 2(W_2 W''_3 - W_3 W''_2)\frac{dv}{u-v} - (W'_2 W_3 - W'_3 W''_2)\,dv$$

ou encore

$$dx = d\left[\frac{2}{u+v}(W_2 W'_3 - W_3 W'_2)\right] - (W'_2 W''_3 - W'_3 W''_2)\,dv,$$

et enfin

$$x = \frac{2}{u+v}(W_2 W'_3 - W_3 W'_2) - \int (W'_2 W''_3 - W'_2 W''_2)\,dv$$

et de même

$$(10)\quad \begin{cases} y = \\ z = \end{cases} \quad \text{par permutation circulaire des indices.}$$

Application. — Comme application, proposons-nous de retrouver, parmi les surfaces précédentes, les surfaces du second degré, qui en font partie *a priori*. Je dis qu'il suffira, pour les obtenir, de prendre pour W_1, W_2, W_3 des polynomes quelconques du second degré.

En effet, il suffira d'écrire que les lignes $u =$ const., qui constituent le second système de lignes asymptotiques, sont toutes des lignes droites. On y parvient aisément, par exemple en écrivant que le plan osculateur est indéterminé le long d'une de ces lignes, ce qui

donne les relations

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}}.$$

Or on vérifie immédiatement la relation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{2}{u+v}\frac{\partial x}{\partial v}$$
$$+\frac{2}{u+v}(W_2 W_3''' - W_3 W_2''') - (W_2' W_3''' - W_3' W_2'''),$$

et analogues; et il reste à écrire les conditions

$$\frac{\dfrac{2}{u+v}(W_2 W_3''' - W_3 W_2''') - (W_2' W_3''' - W_3' W_2''')}{\dfrac{2}{(u+v)^2}(W_2^2 W_3' - W_3 W_2') + \dfrac{2}{u+v}(W_2 W_3'' - W_3 W_2'') - (W_2' W_3'' - W_3' W_2'')} = \ldots = \ldots$$

(les deux derniers rapports se déduisent du premier par permutation circulaire des indices).

En multipliant les deux termes de chaque rapport par W_1''', W_2''', W_3''', *supposés non tous nuls* pour le moment, nous obtenons ce quatrième rapport, égal aux trois premiers,

$$\frac{0}{-\dfrac{2}{(u+v)^2}|W_1 W_1' W_1'''| + \dfrac{2}{u+v}|W_1 W_1'' W_1'''| - |W_1' W_1'' W_1'''|}.$$

Au dénominateur figurent trois déterminants dont nous n'avons écrit que la première ligne.

De l'égalité des quatre rapports, nous déduisons maintenant : ou bien que le dénominateur du dernier soit nul (quel que soit u, bien entendu), ou bien que les numérateurs des trois premiers rapports soient tous nuls (également quel que soit u).

La première de ces deux hypothèses entraîne que les

trois déterminants signalés soient nuls; on voit alors de suite que cela exige l'existence d'une relation linéaire et homogène à coefficients constants, entre les trois fonctions W_1, W_2, W_3. Ce cas ne fournit rien d'intéressant, car l'on voit immédiatement que la relation

$$W_3 = aW_1 + bW_2$$

conduit à

$$x = -az + \text{const.}$$

et

$$y = -bz + \text{const.}$$

On n'a donc plus affaire à une surface.

La seconde hypothèse nous donne

$$W_2 W_3''' - W_3 W_2''' = 0,$$
$$W_2' W_3''' - W_3' W_2''' = 0,$$

et quatre équations analogues par permutation circulaire. Or, on en tirera facilement que, si les W ne sont pas proportionnels entre eux, leurs rapports étant constants (cas qu'il faut écarter comme on l'a vu il y a un instant), ces équations entraînent

$$W_1''' = W_2''' = W_3''' = 0.$$

Nous sommes donc ramenés à l'hypothèse que nous avions écartée au début, et qui seule nous donnera une solution intéressante : les trois fonctions W seront alors des polynomes du second degré. On vérifie immédiatement que, en déterminant ainsi les W, on retrouve bien les surfaces du second degré; nous laisserons de côté ce calcul élémentaire.

Note. — Cet article était déjà imprimé quand la lecture d'une Note de M. Raffy [*Sur les surfaces à lignes de courbure confondues* (*Comptes rendus*, 1908)] a averti l'auteur que M. Goursat avait fait

connaître en 1896 des formules analogues aux formules (10). L'auteur tient à reconnaître ici la priorité de M. Goursat, avec lequel il s'est ainsi rencontré.

[L²2c]

SECTION PLANE D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE A BASE ELLIPTIQUE, HYPERBOLIQUE OU PARABOLIQUE;

PAR M. REBEIX.

La section plane d'un cône à base circulaire figure depuis 1905 au programme de Géométrie descriptive de la classe de Mathématiques.

On admet dans tous les cours que cette section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, puis que sa projection orthogonale sur un plan est une courbe de même espèce. M. Hadamard a donné en 1905, dans ce journal, une démonstration géométrique de ces deux faits. Je vais en exposer une nouvelle qui pourrait, je crois, être comprise de tout bon élève, car elle ne fait intervenir que des notions tout à fait élémentaires.

Je traite auparavant deux problèmes :

PROBLÈME I. — *Construire les foyers* F *et* F′ *d'une conique à centre, sachant qu'elle est tangente en deux points donnés* A *et* B *à deux droites parallèles* AX *et* BY *et que de plus*

$$FA.FB = k.$$

Si F est assujetti à être entre AX et BY, la conique ne peut être qu'une ellipse; si F doit être en dehors, elle ne peut être qu'une hyperbole.

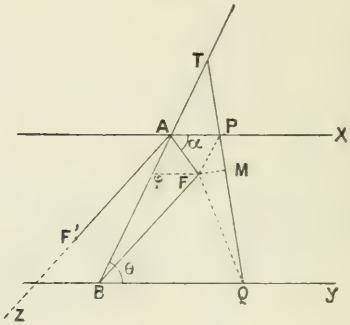
Dans les deux cas, les rayons vecteurs AF et AF′ du

point A étant également inclinés sur AX et, de plus, AF′ et BF étant parallèles comme symétriques par rapport au milieu de AB centre de la courbe, l'angle AFB a ses bissectrices parallèle et perpendiculaire à AX et BY.

Premier cas : F *entre* AX *et* BY. — Posons

$$AB = a, \qquad \widehat{ABY} = \theta, \qquad \widehat{XAF} = \widehat{YBF} = \alpha.$$

Fig. 1.



Dans le triangle FAB, on a

$$F = 2\alpha, \qquad A = 2 \text{ droits} - (\alpha + \theta), \qquad B = \theta - \alpha.$$

On a alors

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{FA}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{FB}{\sin(\theta + \alpha)}$$

puis, comme

$$FA.FB = k,$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 2\alpha} = \frac{k}{\sin(\theta - \alpha)\sin(\theta - \alpha)}$$

ou

$$\frac{a^2}{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{2k}{\cos 2\alpha - \cos 2\theta},$$

et enfin, en posant

$$\cos 2\alpha = u,$$

$$f(u) = 2ku^2 + a^2 u - (2k + a^2 \cos 2\theta) = 0.$$

On peut toujours supposer θ aigu, ce qui justifie les expressions des angles de FAB; en outre, il faut et il suffit que

$$\alpha \leqq \theta \qquad \text{ou} \qquad 0 \leqq 2\alpha \leqq 2\theta,$$

c'est-à-dire

$$1 \geqq \cos 2\alpha \geqq \cos 2\theta.$$

Or

$$f(1) = 2a^2 \sin^2\theta, \qquad f(\cos 2\theta) = -2k \sin^2 2\theta;$$

$f(u) = 0$ a donc toujours deux racines u_1 et u_2, et, comme $2k > 0$, on a

$$u_1 < \cos 2\theta \leqq u_2 \leqq 1.$$

La plus petite racine est à rejeter, la plus grande est acceptable. Il y a donc toujours une ellipse et une seule répondant à la question.

Second cas : F en dehors de AX *et* BY. — Posons toujours

$$AB = a, \qquad \widehat{FBY} = \alpha, \qquad \widehat{ABY} = \theta,$$

en supposant θ aigu. Dans le triangle FAB, on a

$$B = \alpha - \theta, \qquad A = \alpha + \theta, \qquad F = 2 \text{ droits} - 2\alpha.$$

La bissectrice intérieure de AFB, perpendiculaire à AX et BY, montre que, A et B étant de part et d'autre de cette droite, on a

$$\alpha \geqq \theta.$$

Comme, de plus, F doit exister, il faut que $\alpha \leqq 1$ droit; α est, cette fois-ci, assujetti aux conditions

$$\theta \leqq \alpha \leqq 1 \text{ droit}.$$

Or, FAB donne

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{FA}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{FB}{\sin(\alpha + \theta)},$$

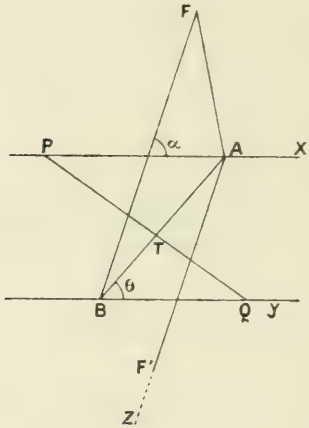
puis

$$\frac{a^2}{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{2k}{\cos 2\theta - \cos 2\alpha},$$

et enfin

$$f(u) = 2ku^2 - a^2 u + a^2 \cos 2\theta - 2k = 0.$$

Fig. 2.



Comme on doit avoir

$$2\theta \geqq 2\alpha \leqq 2 \text{ droits},$$

il faut que

$$\cos 2\theta \geqq \cos 2\alpha \geqq -1,$$

$$f(\cos 2\theta) = -2k \sin^2 2\theta,$$

$$f(-1) \quad = \quad 2a^2 \cos^2 \theta.$$

Comme le premier coefficient est $2k > 0$, il y a deux racines, et l'on a

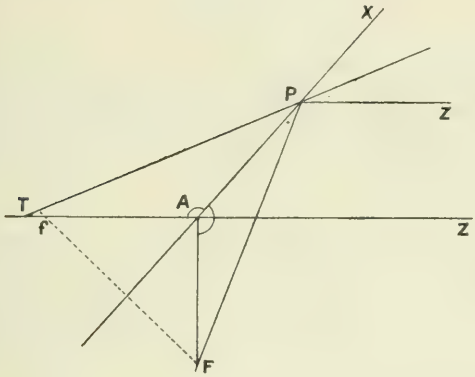
$$-1 < u_2 \leqq \cos 2\theta < u_2.$$

Toujours u_1 est acceptable, et il y a toujours une hyperbole et une seule répondant à la question.

Problème II. — *Construire le foyer* F *d'une parabole tangente à une droite* AX *en un point* A *admettant une droite* AZ *comme direction d'axe et sachant que* AF $= l$.

Le symétrique f de F par rapport à AX est sur AZ, et, par suite, pour avoir F, on prend la droite symé-

Fig. 3.



trique de AZ par rapport à AX sur laquelle on porte AF $= l$, à partir de A du côté où l'on veut situer la parabole. Il y en a alors toujours une et une seule qui convient.

Ces deux problèmes résolus, je puis démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Une tangente mobile* PQ *à une ellipse ou une hyperbole détache sur deux tangentes parallèles fixes* AX *et* BY *à partir des points de contact* A *et* B *deux segments* AP *et* BQ *de produit constant.*

Réciproquement. — Si une droite mobile détache sur deux droites parallèles fixes AX *et* BY *deux*

segments AP *et* BQ *de produit constant, cette droite enveloppe une ellipse ou une hyperbole tangente en* A *et* B *à* AX *et* BY, *suivant que* AP *et* BQ *sont de même sens ou de sens contraires.*

Prenons une ellipse, par exemple, et démontrons que les triangles FAP, QBF sont semblables. Tout d'abord, on a

$$\widehat{FAP} = \widehat{QBF}.$$

Ensuite, en faisant intervenir le point de contact T de PQ qui est tel que, d'après le théorème de Poncelet, les angles AFM et BFM admettent FP et FQ pour bissectrices, on a

$$\begin{aligned} FPA &= 2 \text{ droits} - \left(\widehat{FAP} + \widehat{AFP}\right) \\ &= 2 \text{ droits} - \frac{\widehat{AFB} - \widehat{AFM}}{2} - \frac{\widehat{BFM}}{2} = \widehat{BFQ}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Donc

$$\frac{FA}{BQ} = \frac{AP}{FB},$$

d'où

$$AP.BQ = FA.FB = \text{const.}$$

Démonstration tout à fait analogue pour l'hyperbole en remarquant que, au contraire de l'ellipse, AP et BQ sont de sens contraires.

Réciproque. — Supposons

$$AP.BQ = k,$$

AP et BQ étant cette fois-ci de sens contraires pour changer.

J'ai montré qu'il y a toujours une hyperbole et une

seule tangente en A et B à AX et BY et telle que

$$FA.FB = k.$$

Supposons-la construite et de P menons-lui la seconde tangente PQ′; on a, d'après la proposition directe,

$$AP.BQ' = FA.FB,$$

AP et BQ′ étant de sens contraires; mais, par hypothèse,

$$AP.BQ = FA.FB,$$

AP et BQ étant de sens contraires; donc BQ et BQ′ sont égaux et de même sens, Q′ est en Q et PQ′ sur PQ; autrement dit, PQ enveloppe l'hyperbole que je viens de construire.

Ce théorème ne pouvant avoir d'analogue pour la parabole, je vais le transformer en caractérisant, non plus PQ par une relation entre AP et BQ, mais par une relation entre AP, AT et BT, T étant le point où PQ va rencontrer AB. Nommons, en outre, φ le point où AB est rencontré par la parallèle à AX issue de F.

Je puis écrire

$$BQ = AP\frac{TB}{TA}, \qquad FB = FA\frac{\varphi B}{\varphi A}.$$

Par suite,

$$AP : BQ = FA : FB$$

s'écrit

$$\overline{AP}^2\frac{TB}{TA} = \overline{AF}^2\frac{\varphi B}{\varphi A},$$

qui lui est toujours équivalente.

Imaginons que, AX et A restant fixes ainsi que F, F′ s'éloigne indéfiniment sur la droite AF′Z; F′B restant égal et parallèle à AF, B s'éloigne indéfiniment dans la direction AZ, et AB tend à venir sur AZ; la courbe tend à devenir une parabole tangente en A

à AX, de direction d'axe AZ; $AF\varphi$ tend à devenir isoscèle et, par suite, φA à devenir égal à AF; de plus, $\frac{\varphi B}{TB}$ tend évidemment vers 1 (il suffit de laisser T fixe, par exemple).

Notre relation, que j'écris

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = \frac{\overline{AF}^2}{\varphi A}\,\frac{\varphi B}{TB},$$

devient donc, à la limite,

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = AF.$$

Démontrons-la directement sur la parabole. Dans les triangles FAP et PAT, on a

$$\widehat{FAP} = \widehat{PAT},$$

à cause de la propriété de la tangente en A d'être bissectrice de $\widehat{FAZ}$; puis

$$\widehat{FPA} = \widehat{MPZ},$$

d'après le théorème de Poncelet, ou

$$FPA = \widehat{PTA};$$

donc

$$\frac{AF}{AP} = \frac{AP}{AT} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{AP}^2}{AT} = AF.$$

Donc :

Théorème. — *Si* AX *est une tangente fixe en un point* A *d'une parabole de direction d'axe* AZ *et* P, T *les points où une tangente mobile coupe* AX *et* AZ, *on a*

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = AF = \text{const.}$$

Réciproquement. — Si une droite TP détache sur deux droites fixes AX et AZ deux segments AT et AP liés par la relation

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = l,$$

TP enveloppe une parabole de direction d'axe AZ, tangente en A à AX et située du côté opposé à T par rapport à AX.

En effet, j'ai vu qu'il y a une parabole et une seule tangente en A à AX de direction d'axe AZ, telle que

$$AF = l$$

et située par rapport à AX de côté opposé à T. A cette parabole de P menons la seconde tangente PT′; on a, d'après le théorème direct,

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT'} = AF = l.$$

Donc

$$AT' = AT,$$

et, comme T et T′ sont du même côté de AX, ils sont confondus. Ainsi donc TP enveloppe cette parabole.

Je suis maintenant en mesure de démontrer le théorème général suivant, qui fait l'objet de cette Note :

Théorème. — *Un cône ou un cylindre à base elliptique, hyperbolique ou parabolique est coupé par tout plan sécant, non issu du sommet ou non parallèle aux génératrices, suivant une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

S'il s'agit d'un cône, la section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet ne coupe pas, coupe ou touche le cône.

S'il s'agit d'un cylindre, la section est de même nature que la base.

Si le plan sécant (R) est parallèle au plan de base (H), le fait est évident. Supposons donc que (R) coupe (H) suivant une droite UV :

1° La base étant une conique à centre, menons-lui les deux tangentes AX et BY parallèles à UV [1]; une tangente mobile les coupe en P et Q de façon que

$$AP.BQ = \text{const.}$$

S'il s'agit d'un cône de sommet S, tel que (R) ne soit parallèle à aucun des plans tangents SAX et SBY, ces deux plans coupent (R) suivant deux droites ax et by; SP et SQ coupent (R) en p et q, et pq est la section de SPQ par le plan sécant; l'enveloppe de pq est évidemment la section plane que je veux déterminer, puisque la tangente à la section plane en un point M est l'intersection du plan tangent le long de SM avec le plan sécant.

Or, ax et by sont parallèles à AX et BY, et par suite

$$AP = ap\frac{SA}{Sa}, \qquad BQ = bq\frac{SB}{Sb}.$$

Comme SAa et SBb sont fixes, de

$$AP.BQ = \text{const.}$$

je déduis

$$ap.bq = \text{const.},$$

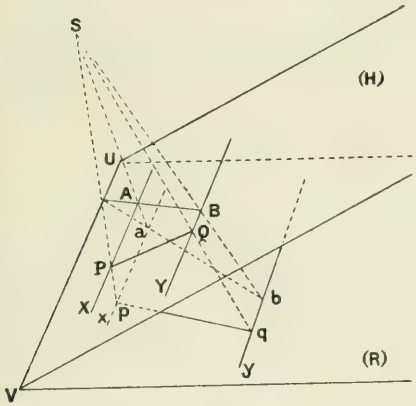
ce qui montre que pq enveloppe une ellipse ou une hyperbole tangente à ax et by en a et b.

---

[1] On montrera à la fin de la démonstration qu'on peut toujours se supposer dans le cas où ces tangentes existent.

Il est à remarquer que si a et b sont tous deux, par rapport à S, du même côté que A et B ou tous deux de côtés opposés, ap et bq sont tous deux de même sens que AP et BQ ou tous deux de sens contraires. La courbe (c) enveloppe de pq est alors de même nature que la courbe (C) enveloppe de PQ. Sinon l'une est

Fig. 4.



une ellipse et l'autre une hyperbole. Cela signifie visiblement que la section est une ellipse ou une hyperbole suivant que le plan parallèle au plan sécant (R), mené par S, est non sécant ou sécant au cône.

S'il s'agit d'un cylindre, il faut remplacer SA et SB tout simplement par deux parallèles aux génératrices AU et BU; alors ap et bq sont égaux à AP et BQ et de même sens; le genre de la conique est conservé.

Supposons maintenant que, nous trouvant dans le cas du cône, l'une des droites SA ou SB, SB par exemple, est parallèle à (R); c'est le cas où (R) est parallèle au plan tangent SBY au cône.

La section cette fois-ci est une parabole :

Je marque T où PQ coupe ABZ et j'ai

$$\overline{AP}^2 \frac{TB}{TA} = \overline{AF}^2 \frac{\varphi B}{\varphi A}$$

ou

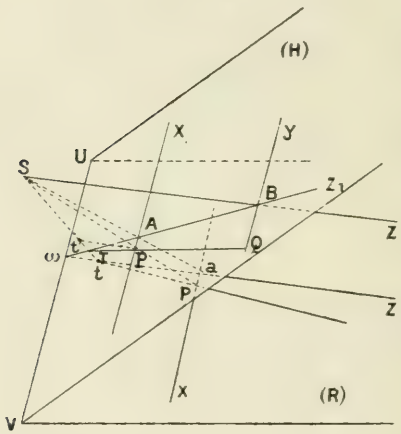
$$\overline{AP}^2 = l^2 \frac{TA}{TB}, \qquad l^2 = \overline{AF}^2 \frac{\varphi B}{\varphi A}$$

étant une constante.

On a

$$AP = \frac{SA}{Sa} ap = \lambda . ap, \qquad \frac{TA}{TB} = \frac{t'A}{SB},$$

Fig. 5.



A t étant parallèle à SB; mais

$$\frac{t'A}{ta} = \frac{SA}{Sa}, \qquad t'A = \frac{SA}{Sa} at,$$

puis

$$\frac{TA}{TB} = \frac{SA}{SB . Sa} at = \frac{1}{\mu} at.$$

Donc, finalement,

$$\lambda^2 \overline{ap}^2 = \frac{l^2}{\mu} at$$

ou

$$\overline{ap}^2 = k.at,$$

ce qui montre que tp enveloppe une parabole tangente en a à ax et de direction d'axe az.

C. Q. F. D.

2° Supposons enfin que la base soit dans le plan (R) une parabole (*fig.* 5). Je lui mène ax tangentiellement et parallèlement à uv, puis je trace aZ parallèle à l'axe; une tangente mobile à la parabole est caractérisée par ce fait que

$$\frac{\overline{ap}^2}{at} = k.$$

S'il s'agit d'un cône ayant cette parabole (c) pour base, je tire Sa puis SZ parallèle à aZ qui coupent le plan sécant (H) en A et B; je trace AX, BY parallèles à UQ puis AB; la tangente tp donne le plan tangent Stp au cône qui coupe (H) suivant TPQ tangente à la section (C). Les mêmes calculs que tout à l'heure, mais faits en sens inverse, montrent que de $\overline{ap}^2 = k.at$ je tire

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = l^2 \frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{TB}}.$$

Je déduirais enfin de cette relation

$$\mathrm{AP.BQ} = \text{const.}$$

Ceci montre que la section du cône à base parabolique (c) est une ellipse ou une hyperbole tangente à AX et BY en A et B. Il est visible que, pour que (C) soit une ellipse, c'est-à-dire que AP et BQ aient le même sens, il faut et il suffit que le plan mené par S parallèlement à (H) ne coupe pas le cône.

S'il s'agit d'un cylindre, SZ n'existe plus; Sa est

remplacé par la parallèle au aux génératrices; alors AP et ap sont égaux; en appelant ω le point où AT et at coupent UV, on a

$$AT = \frac{\omega A}{\omega a}\, at = m.at$$

et, par suite, on a

$$\frac{\overline{Ap}^2}{AT} = mk,$$

ce qui prouve que AT enveloppe une parabole tangente en A à AX, sa direction d'axe AZ étant la trace du plan ZAU sur le plan sécant.

Le théorème est donc démontré dans tous les cas. Mais j'ai admis au début de ma démonstration qu'il était possible de mener à la base elliptique ou hyperbolique des tangentes parallèles à UV. Dans le cas de l'ellipse, cela est toujours possible; mais, dans le cas de l'hyperbole, il est nécessaire que UV ne la coupe pas en ses deux branches.

S'il en est ainsi, je changerai comme suit mon plan de base de façon à pouvoir appliquer ma démonstration :

Cas du cône. — Traçons une droite U_1V_1 ne coupant pas l'hyperbole base du cône ou la coupant sur une seule branche; les tangentes parallèles à U_1V_1 existant, ma démonstration montre que tout plan (H_1) passant par U_1V_1 coupe le cône suivant une ellipse ou une hyperbole ou même une parabole; je puis toujours choisir (H_1) de façon que la section soit elliptique. La base du cône étant maintenant dans (H_1) une ellipse, ma démonstration s'applique à la section par le plan (R).

Cas du cylindre. — UV coupant les deux branches

de l'hyperbole, soient I un des points d'intersection et la tangente U_1IV_1; le plan tangent au cylindre en I coupe (R) suivant U_2IV_2. Soit (H_1) un point passant par U_2IV_2 et coupant la branche de l'hyperbole qui contient I en ce point et un autre point qu'il est inutile de désigner. Ma démonstration s'applique; (H_1) coupe le cylindre suivant une hyperbole. Prenons-la pour base; (R) coupe son plan suivant U_2IV_2, et, comme il y a des tangentes à cette hyperbole parallèles à U_2V_2 (une est même U_2V_2), ma démonstration s'applique.

Remarque I. — J'aurais pu me dispenser dans ma démonstration de donner le genre de la courbe et me borner à démontrer que c'est une conique.

En effet, si M est un point de la base, il fournit dans la section un point *m* intersection de (R) avec SM. Ce point s'éloigne indéfiniment si SM devient parallèle à (R).

Donc, suivant qu'il y a deux génératrices parallèles à (R), une ou pas du tout, la section est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Remarque II. — Dans le cas général, la tangente en *m* est l'intersection de (R) par le plan tangent le long de SM. Or, on démontre pour l'hyperbole qu'une asymptote est la position limite d'une tangente dont le point de contact *m* s'éloigne indéfiniment. Donc, les asymptotes de la section hyperbolique sont les sections par (R) des plans tangents au cône le long des génératrices qui sont parallèles à (R).

Dans le cylindre hyperbolique, les plans parallèles aux génératrices et passant par les asymptotes de la base sont ce qu'on appelle les *plans asymptotes du cylindre;* ils contiennent les asymptotes de toutes les sections.

Quand il y a une seule génératrice du cône parallèle à (R), la section est une parabole d'axe évidemment parallèle à cette droite.

Ces deux faits sont utilisés dans tous les cours de Descriptive ou de Cotée pour la détermination des asymptotes de la projection de la section hyperbolique ou de sa tangente au sommet et de son axe, quand la section est parabolique.

Remarque III. — Le théorème aurait pu s'énoncer ainsi :

La perspective d'une conique est une conique. La projection parallèle d'une conique est une conique du même genre.

Remarque IV. — La relation AP.BQ = const. sur laquelle repose la démonstration n'est autre chose que la forme la plus simple de la relation homographique qui a été ici démontrée élémentairement.

[K¹21d]

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE;

PAR M. AURIC.

M. d'Ocagne a donné dans ce *Journal* (1907, p. 1) une très intéressante construction permettant d'obtenir avec une grande approximation la longueur d'un arc de cercle d'extrémités connues ou réciproquement de porter sur une circonférence, à partir d'un point donné, un arc de longueur donnée.

Nous rappelons ce très simple procédé :

Si sur la corde AB on prend

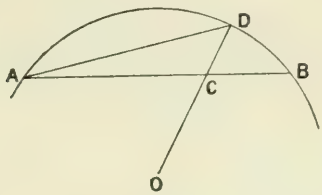
$$AC = \frac{2}{3} AB.$$

et qu'on tire OCD, on aura très approximativement

$$\text{corde } AD = \frac{2}{3} \text{ arc } ADB.$$

M. d'Ocagne a obtenu le rapport $m = \frac{2}{3}$ en considé-

Fig. 1.

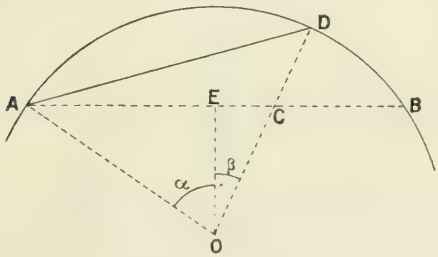


rant un arc infiniment petit ; il se trouve, en effet, que dans ce cas la différence

$$\text{corde } AD - \frac{2}{3} \text{ arc } ADB$$

est un infiniment petit du cinquième ordre. Mais on

Fig. 2.



peut se demander comment il se fait qu'une construction conduisant à une grande approximation avec un

arc infiniment petit conserve également cette propriété avec un arc fini.

C'est pour répondre à cette question que nous nous sommes posé le problème suivant :

Étant donné l'arc ADB, *trouver le rapport* $m = \frac{AC}{AB}$ *tel qu'on ait* RIGOUREUSEMENT

$$\text{corde AD} = m \text{ arc ADB}.$$

Les angles α, β étant ceux marqués sur la figure, on aura

$$m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\right),$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = m\alpha,$$

d'où, en éliminant β,

$$\sin 2\alpha(1 - 2m^2\alpha^2) = 2\alpha(1 - 2m\sin^2\alpha)\sqrt{1 - m^2\alpha^2}$$

ou

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \alpha^2(1 - m^2\alpha^2)(1 - 4m\sin^2\alpha + 4m^2\sin^2\alpha).$$

Telle est la relation (du quatrième degré en m et transcendante en α) qui lie m et α.

Pour $\alpha = 0$, on trouve aisément le point double réel

$$m = \pm\infty$$

et le point double isolé

$$m = \frac{2}{3}$$

qui correspond à la solution de M. d'Ocagne.

Pour $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ $(k \neq 0)$ on trouve

$$m = \pm\frac{1}{\alpha} = \pm\frac{2}{k\pi},$$

et, en outre, un point double isolé

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{pour } k \text{ impair}$$

et

$$m = \pm \infty \quad \text{pour } k \text{ pair.}$$

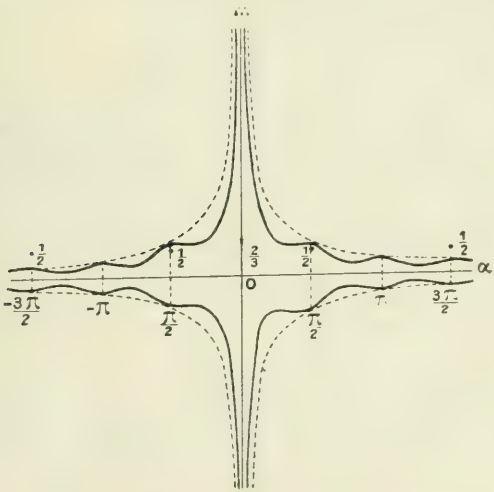
La courbe ne rencontre jamais l'axe des α ; elle se trouve tout entière à l'intérieur des deux hyperboles

$$1 - m^2 \alpha^2 = 0,$$

auxquelles elle est tangente pour $x = k\frac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions, la courbe affecte la forme ci-dessous de deux hyperboles ondulées :

Fig. 3.



Le résultat obtenu par M. d'Ocagne provient de ce fait que l'horizontale $m = \frac{2}{3}$ passe par un point double isolé ($\alpha = 0$) et à faible distance du point

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2},\ m = \frac{2}{\pi} = 0.636\right)$$

qui correspond à la rectification de la demi-circonférence ; c'est ce qui explique l'approximation obtenue.

On réaliserait une approximation aussi grande, mais par un procédé moins simple :

Soit en faisant varier m de $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{2}$ lorsque α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à réunir les deux points doubles ; soit en prenant $m = \frac{1}{\alpha}$, ce qui revient à remplacer la courbe par l'hyperbole asymptotique; soit en menant par le point double

$$\left(\alpha = 0,\ m = \frac{2}{3}\right)$$

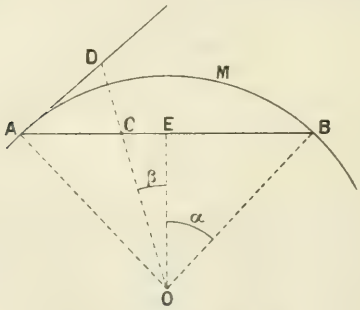
une tangente à la courbe ou plus simplement en joignant ce point double au point

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2},\ m = \frac{2}{\pi}\right).$$

La variation de m avec α rend la solution beaucoup plus compliquée, et dès lors il semble inutile de chercher à perfectionner le procédé donné par M. d'Ocagne.

Nota. — Une remarque analogue peut être faite au

Fig. 4.



sujet du procédé de Snellius (*Cyclometricus*, Leyde, 1621).

Ce procédé consiste à prendre

$$\frac{AC}{AB} = m = \frac{1}{3}$$

et à prolonger OC jusqu'à sa rencontre avec la tangente en A.

On a approximativement

$$AD = \frac{1}{3} \text{arc} AMB.$$

On aura comme précédemment, pour la solution *exacte* du problème,

$$m = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\tang \beta}{\tang \alpha}\right),$$

$$\tang(\alpha - \beta) = 2m\alpha,$$

d'où

$$m = \frac{1}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{2\alpha \tang \alpha}.$$

On trouve

Pour $\alpha = 0 \ldots\ldots \quad m = \frac{1}{3}$

» $\alpha = \frac{\pi}{4} \ldots\ldots \quad m = 1 - \frac{2}{\pi} = 0,363\frac{1}{4}$

» $\alpha = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \quad m = \frac{1}{2}$

De sorte que, pour les faibles valeurs de α, m subit une variation très peu sensible et l'on peut prendre avec une approximation suffisante $m = \frac{1}{3}$; mais, pour des arcs voisins de la demi-circonférence, le procédé est nettement inférieur à celui de M. d'Ocagne.

[K¹13a]

SUR UN THÉORÈME DE MANNHEIM;

PAR M. R. BRICARD.

Les *Nouvelles Annales* ont publié en 1908, comme question à résoudre [1], l'énoncé d'un théorème retrouvé dans les papiers laissés par A. Mannheim. Le voici :

On donne quatre plans. On mène une droite D *que les quatre plans partagent en des segments proportionnels à des segments donnés. Par les points où* D *rencontre les plans, on leur élève des perpendiculaires et l'on construit la seconde droite* Δ *qui rencontre ces perpendiculaires. Le plan mené par* D *parallèlement à* Δ *est parallèle à une droite fixe, quelle que soit la position de* D.

On constate aisément que D peut avoir une direction quelconque. D'autre part, les perpendiculaires aux quatre plans ont des directions fixes. Ces remarques permettent de simplifier légèrement l'énoncé et de lui donner la forme suivante :

On considère quatre droites M_1, M_2, M_3, M_4, *de directions fixes. Soient* D *et* Δ *les deux droites qui les rencontrent toutes les quatre. Si les segments déterminés sur l'une de ces droites,* D *par exemple, sont proportionnels à des segments donnés, un plan parallèle à* D *et* Δ *est parallèle à une droite fixe.*

---

(1) *Nouvelles Annales*, 4e série, t. VIII, question 2111.

On voit quelle est l'élégance de la conclusion, symétrique par rapport à D et Δ, alors que ces deux droites jouent des rôles différents dans l'hypothèse.

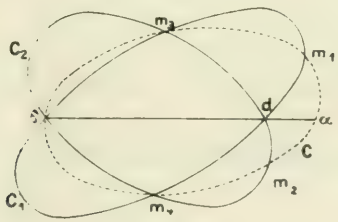
Il y a lieu de croire que l'illustre géomètre a déduit cette proposition de considérations cinématiques, qu'il serait intéressant de reconstituer. Je vais donner une démonstration directe.

Rendons d'abord l'énoncé projectif. A cet effet, désignons par m_1, m_2, m_3, m_4, d, δ les points où les droites M_1, M_2, M_3, M_4, D, Δ rencontrent respectivement le plan de l'infini. En remplaçant ce dernier par un plan quelconque, on se trouve en présence de l'énoncé suivant :

On donne dans un plan quatre points fixes, m_1, m_2, m_3, m_4. Par ces points on mène quatre droites variables M_1, M_2, M_3, M_4. Soient D et Δ les deux droites qui les rencontrent et d et δ leurs traces sur le plan. Soient aussi p_1, p_2, p_3, p_4 les points où D rencontre les droites M_1, M_2, M_3, M_4. Si la ponctuelle $(d\,p_1\,p_2\,p_3\,p_4)$ est homographique à une ponctuelle fixe, la droite $d\,\delta$ passe par un point fixe.

Soit H_1 l'hyperboloïde déterminé par les trois droites

Fig. 1.



M_1, M_3, M_4. Sa trace sur le plan est une conique C_1 (*fig.* 1) qui passe par les cinq points m_1, m_3, m_4, d, δ.

On sait que les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde déterminent des divisions homographiques sur une génératrice de l'autre système et sur une conique quelconque de la surface. Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre points m_1, m_3, m_4, d sur la conique C_1 est égal au rapport anharmonique des quatre points p_1, p_3, p_4, d sur la droite D. Ce rapport anharmonique a donc une valeur constante.

De même l'hyperboloïde H_2 déterminé par les trois droites M_2, M_3, M_4 a pour trace sur le plan une conique C_2, qui passe par les cinq points m_2, m_3, m_4, d, δ, et le rapport anharmonique des quatre points m_2, m_3, m_4, d sur C_2, égal au rapport anharmonique des quatre points p_2, p_3, p_4, d sur la droite D, a une valeur constante.

Les deux faisceaux $\delta(m_1, m_3, m_4, d)$ et $\delta(m_2, m_3, m_4, d)$ ont des rapports anharmoniques constants. Il en est donc de même du faisceau $\delta(m_1, m_2, m_3, m_4)$ et le point δ décrit par conséquent une conique C qui passe par les quatre points m_1, m_2, m_3, m_4. Le second point α où la droite $d\delta$ rencontre C est fixe, puisque le rapport anharmonique des quatre points m_1, m_3, m_4, α, égal à celui du faisceau $\delta(m_1, m_3, m_4, d)$, a une valeur constante.

Il est donc bien démontré que la droite $d\delta$ passe par un point fixe.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

Épreuve théorique. — *Développement d'une fonction en série trigonométrique.*

I. *En admettant qu'une fonction $y = f(x)$ puisse être représentée par une série trigonométrique, calculer les coefficients de la série.*

Application :

(*a*) $$y = x,$$

(*b*) $$y = f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\, dt.$$

II. *Valabilité et convergence du développement.*

1° *Limite de l'intégrale*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx,$$

quand n augmente indéfiniment.

2° *L'intégrale* $\int_0^b \frac{\sin nx}{x}\, dx$ *est comprise entre* 0 *et* π

3° *L'intégrale de Dirichlet*

$$J = \int_0^\pi \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

quand n augmente indéfiniment, tend vers $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$.

4° *L'intégrale de Fourier*

$$H = \int_0^\pi f(x) \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$$

a pour limite

$$\frac{\pi}{2}[f(+0) + f(+\pi - 0)].$$

5° *La série de Fourier est convergente et a en général pour valeur*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

III. *On donne la surface*

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + u(z^2 - y^2) - u^2 x = 0.$$

u désignant une constante donnée. On considère toutes les

droites Δ *rencontrant les deux droites*

$$D \begin{cases} x = u, \\ z = 0. \end{cases} \qquad D_1 \begin{cases} x = -u, \\ y = 0. \end{cases}$$

On désignera par $2v$ *l'y du point* A, *par* $2w$ *le* z *du point* B.

1° *Une droite* Δ *ne rencontre la surface qu'en un seul point. Donner les coordonnées de ce point en fonction de* v, w.

2° *On considère la normale à la surface en un point de l'intersection par le plan* $D\Delta$. *Calculer l'angle de cette normale avec le plan.*

3° *Quel résultat peut-on en déduire pour les lignes d'intersection de la surface par les plans* $D\Delta$, *et de même par les plans* $D_1\Delta$?

4° *Montrer que ces lignes d'intersection sont des circonférences.*

Épreuve pratique. — I. *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$p^2y^2 + q^2x^2 - pq\,xyz(px + qy - z) = z.$$

Démontrer qu'elle admet comme intégrale complète des surfaces du second degré admettant les plans de coordonnées comme plans principaux.

Déterminer les surfaces qui passent par la courbe

$$\frac{\sqrt{3}}{5}z = x^2 - \frac{25}{48},$$

$$y = x^2 - \frac{7}{48}.$$

II. *On donne l'équation*

$$(z + \sin y)z \sin y \cos x\,dx + (z + \sin x)z \sin x \cos y\,dy$$
$$+ (\sin x + \sin y)\sin x \sin y\,dz = 0.$$

Vérifier que c'est une équation aux différentielles totales exacte.

Intégrer l'équation.

(Juillet 1909.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — 1° *Étant donnée la différentielle totale*

$$(2xz^2 + x^2 + yz)\,dx - z(z^2 + x)\,dy + (z^2y - 2zx^2 - xy)\,dz,$$

on demande de montrer qu'on peut, par un changement de variables convenable, la réduire à une différentielle totale de deux variables seulement et d'effectuer ce calcul. En déduire l'intégrale générale de l'équation obtenue en égalant à zéro cette différentielle.

2° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{(1 - z + z^2)\,dz}{\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}},$$

prise le long d'un contour fermé simple entourant les trois points 1, 2, 3. *On précisera la détermination qu'on choisira pour le radical.*

3° *Rechercher, en coordonnées cartésiennes, les surfaces telles que leurs deux systèmes de lignes asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant les deux familles de droites et de courbes*

$$y = \text{const.},$$
$$x\,f(y) = \text{const.},$$

où $f(y)$ est une fonction donnée de y.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^2 x + \sin x \cos x + 1}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 1}\,dx.$$

(Juin 1909.)

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} - 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2,$$

où z désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y.

En supposant que x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point variable, indiquer le mode de génération des surfaces définies par l'intégrale.

Particulariser la fonction arbitraire qui entre dans l'intégrale de manière que la surface correspondante passe par l'hyperbole

$$x = a,$$
$$z^2 - y^2 = a^2,$$

où a désigne une longueur donnée.

II. *Étant donnés dans un plan deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère la droite variable*

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha),$$

dont le mouvement dépend du paramètre arbitraire α; soit M *le point de contact de cette droite avec son enveloppe.*

Établir l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $f(\alpha)$ pour que la longueur OM *soit constamment égale au rayon de courbure en* M *de l'enveloppe, et faire voir que son intégration se ramène à des quadratures.*

Épreuve pratique. — *Trouver les intégrales générales du système des équations différentielles*

$$\frac{du}{dx} + 16v - 6u = 48\cos 2x,$$
$$\frac{dv}{dx} - 2v - u = 6\cos 2x - 2\sin 2x,$$

où u, v désignent deux fonctions inconnues de la variable indépendante x. (Novembre 1909.)

Clermont-Ferrand.

Épreuve théorique. — *Trouver les surfaces telles que le pôle du plan tangent en un point* M *de la surface par rapport à une quadrique donnée soit situé dans le plan passant par* M *et une droite donnée. Cas particulier des*

surfaces de révolution. Trouver parmi ces dernières celles pour lesquelles le rapport des rayons de courbure principaux est constant.

Épreuve pratique. — *Montrer que, pour que l'équation du troisième degré*

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

ait une racine double, il faut en posant

$$\frac{a_0 a_2}{a_1^2} = 1 - \frac{1}{h^2}, \qquad \frac{a_1 a_3}{a_2^2} = 1 - \frac{1}{h_1^2},$$

que la somme $1 + h + h_1$ *soit nulle pour l'une des quatre déterminations dont elle est susceptible.*

Condition de réalité des racines.

(Juillet 1909.)

Dijon.

Épreuve théorique. — I. 1° *Intégrer*

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4z}{x - y}.$$

2° *Montrer que les lignes asymptotiques des surfaces intégrales s'obtiennent par quadrature.*

3° *Déterminer toutes les surfaces intégrales admettant une ligne asymptotique qui se projette (parallèlement à* Oz*) sur le plan* xOy *suivant une courbe* (C) *donnée à l'avance.*

Faire explicitement la détermination de ces surfaces et celle de leurs lignes asymptotiques dans le cas où la courbe donnée (C) *a pour équation* $x - y = a$ (a *constante donnée*).

4° *Déterminer toutes les surfaces intégrales admettant leur intersection avec le plan* $z = b$ (b *constante donnée*).

Épreuve pratique. — *Intégrer par différentiation l'équation différentielle*

$$2y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + \frac{y'^3}{3} - y' - 1.$$

Trouver les courbes passant par l'origine. Il y en a une qui en ce point est tangente à Ox. *Elle rencontre* Oy *en un autre point* A. *Calculer la longueur de l'arc* OA *de cette courbe intégrale.*

(Juin 1909.)

Grenoble.

Composition écrite. — I. *Condition pour que les courbes* $f(x, y, z) = 0$ *aient un contact du second ordre avec leur enveloppe. Vérifier que les courbes*

$$(y - \alpha^{\sqrt{2}})^2 = 2(1 - \alpha^{\sqrt{2}-1})(2x - \alpha^{\sqrt{2}+1})$$

jouissent de cette propriété.

II. *On transforme homothétiquement une courbe* (S) *définie par* $Y = \varphi(X)$, *par rapport à un point* P *qui décrit une courbe* (S_0), *le rapport* k *d'homothétie variant avec le point* P. *On demande de déterminer* k *en fonction de la variable qui définit le point* P *sur* (S_0) *de façon que les courbes transformées de* (S) *aient un contact du second ordre avec leur enveloppe.*

Application : la courbe (S_0) *a pour équation* $y_0^2 = 2x_0$, *et la courbe* (S), $Y^2 = 4X$.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$3(2y - 3z)(8yz - x^2)\,dx + 12x(x^2 + 4z^2)\,dy \\ - 2x(9x^2 + 16y^2)\,dz = 0.$$

(Juillet 1909.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2108.

(1908, p. 480.)

On donne un triangle ABC *et le centre* O *de son cercle circonscrit. On prend les symétriques* A′, B′ *de* O *par*

rapport aux côtés issus de C : *le cercle* A′CB′ *et les cercles analogues pour les sommets* A, B *se coupent en un même point du cercle* ABC.

(Canon.)

Solution,

Par M. R. B.

Il est aisé de voir que les points A′, B′, C′ sont respectivement symétriques des points A, B, C par rapport au centre du cercle des neuf points du triangle ABC. Le théorème apparaît alors comme cas particulier de la proposition suivante :

Soit AB′CA′BC′ *un hexagone ayant un centre de symétrie. Les cercles* ABC, AB′C′, A′BC′, A′B′C *ont un point commun.* (*Il en est de même des cercles* A′B′C′, A′BC, AB′C, ABC′.)

Les six sommets de l'hexagone appartiennent en effet à une ellipse sur laquelle ils sont deux à deux diamétralement opposés. Le cercle ABC coupe de nouveau l'ellipse en un point P tel que les cordes AP et BC soient également inclinées sur l'axe de l'ellipse. Mais BC est parallèle à B′C′; AP et B′C′ sont donc également inclinées sur l'axe de l'ellipse, et par conséquent le cercle AB′C′ passe par le point P. Il en est de même des deux autres cercles visés dans l'énoncé, et la proposition est ainsi démontrée.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

2115.

(1909, p. 56.)

Si l'on définit un tétraèdre SABC *en donnant les faces* λ, μ, ν *du trièdre* S *et la longueur* α, β, γ *des arêtes issues de* S, *le tétraèdre est orthocentrique sous les deux conditions*

$$\frac{\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\beta}{\cos\mu} = \frac{\gamma}{\cos\nu}.$$

Cela étant, dans un tétraèdre orthocentrique ABCD *dont* H *est l'orthocentre, on donne les valeurs algébriques des segments* $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$, *le sens positif sur chaque hauteur allant de la base vers le sommet; déterminer la*

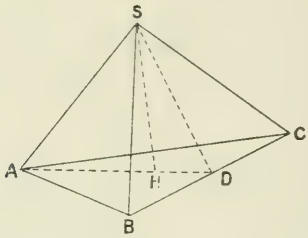
valeur commune des rapports égaux

$$\frac{\cos(b, c)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\cos(c, a)}{\sqrt{\beta}} = \frac{\cos(a, b)}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\cos(d, a)}{\beta\gamma} = \ldots = \ldots.$$

SOLUTION,

Par M. Clapier.

Soit H l'orthocentre du triangle ABC; la hauteur issue de S



passe par ce point, et nous avons

$$\overline{SA}^2 - \overline{SD}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{DH}^2 = AD(AH - DH).$$

D'autre part, SD est perpendiculaire à BC et

$$\widehat{BSC} = \widehat{BSD} + \widehat{DSC};$$

donc

$$\cos\lambda = \frac{\overline{SD}^2}{\beta\gamma} - \frac{DB \times DC}{\beta\gamma},$$

$$\beta\gamma\cos\lambda = \overline{SD}^2 - DH \times DA,$$

et, retranchant de la première relation, il vient

$$\alpha^2 - \beta\gamma\cos\lambda = AD \times AH = \overline{AH}^2 + \rho^2,$$

ρ étant le rayon du cercle conjugué au triangle ABC; on en déduit

$$\beta\gamma\cos\lambda = \gamma\alpha\cos\mu = \alpha\beta\cos\nu = h^2 - \rho^2,$$

ce qui démontre la première partie de la question.

Remarquons que la puissance du point H par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre est

$$2\rho^2 = 2dh,$$

d étant la distance de ce point à l'orthocentre.

D'après cela, si l'on considère le tétraèdre ABCD, dont l'orthocentre H est supposé à l'intérieur de son volume, nous aurons

$$\widehat{BHC} = \text{supplém. de } (b, c)$$

et

$$\beta\gamma\cos(b, c) = h\delta = \mu^2,$$

μ étant le rayon de la sphère conjuguée au tétraèdre donné. Si l'on désigne par (H) la puissance prise avec son signe du point H, par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre, nous aurons les relations algébriques

$$\frac{\cos(b, c)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\cos(c, a)}{\sqrt{\beta}} = \frac{\cos(a, b)}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\cos(d, a)}{\beta\gamma} = \frac{-(H)}{3\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Il reste à exprimer (H) à l'aide des quantités α, β, γ, δ; or nous avons

$$\frac{2(H)}{3} = 2\beta\gamma\cos(b, c) = -(\beta^2 + \gamma^2) + \overline{BC}^2;$$

d'où, en additionnant les six égalités correspondant aux six arêtes du tétraèdre, on déduit

$$4(H) = \Sigma_6\overline{BC}^2 - 3\Sigma\alpha^2.$$

Autre solution par M. Bouvaist.

2117.

(1909, p. 100.)

Étant données dans l'espace deux figures égales F *et* F', *soient* A *un point de la première et* B *le point correspondant de la seconde; le point* B *étant considéré comme point de* F, *soit* C *le point correspondant de* F'; *le point* C *étant considéré comme point de* F, *soit* D *le point correspondant*

de F'. *Les deux triangles* ABC *et* BCD *sont égaux. Démontrer* directement *que, si* O *est le centre de la sphère qui passe en* A, B, C, D, *on ne peut généralement pas faire coïncider les deux tétraèdres* OABC *et* OBCD (*qui sont d'ailleurs égaux*) *en mettant* A *en* B, B *en* C, C *en* D.

(G. F.)

SOLUTION.

Par un ABONNÉ.

Les deux demi-plans qui ont pour bord commun la droite BC, et qui contiennent respectivement les points A et D, forment un dièdre dont le plan bissecteur contient le point O ; le fait énoncé est une conséquence de cette position du point O.

Autre solution par M. VAULOT.

2122.

(1909, p. 143.)

Étant donné un quadrilatère plan circonscriptible à un cercle, on divise chaque côté en deux segments proportionnels aux longueurs des côtés adjacents. Démontrer que les quatre points obtenus sont sur un même cercle.

(CLAPIER.)

SOLUTION,

Par M. PARROD.

Soient E, F, G et H les quatre points respectivement situés sur les côtés AB, BC, CD et DA du quadrilatère.

On a

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AD + BC},$$

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AB}{AB + DC},$$

donc

$$AE = AH.$$

Les triangles AEH, BEF, ... étant isoscèles, on voit facilement que les angles opposés du quadrilatère EFGH sont supplémentaires.

Il est donc inscriptible, et le cercle circonscrit est concentrique au cercle inscrit dans le quadrilatère donné.

Autres solutions par MM. Barisien, Bouvaist, Duby, P. Favre, Giraudon, Klug, P. de Lépinay, Pélissier.

2123.

(1909, p. 143.)

L'enveloppe des cercles qui ont leur centre sur un cercle donné et qui sont tangents à un diamètre fixe de ce cercle est une épicycloïde à deux rebroussements.

(E.-N. Barisien.)

Solution,

Par M. Parrod.

Ce théorème est un cas particulier du suivant : *L'enveloppe des cercles qui ont leur centre sur un cercle donné et qui sont tangents à une hypocycloïde est une épicycloïde ayant les mêmes points de rebroussement.*

En effet, soit C le cercle dont le point M engendre l'hypocycloïde et soit C′ le cercle symétrique de C par rapport à la tangente en A, point de contact du cercle C et du cercle fixe; le point M′ symétrique de M décrit l'épicycloïde. Le cercle de centre A et de rayon AM = AM′ est tangent aux deux courbes.

Un autre cas particulier simple est celui où le cercle C est égal au cercle fixe. L'épicycloïde est alors une cardioïde.

Autres solutions par MM. Agronomof, Bouvaist, Duby, Giraudon, Klug, P. de Lépinay, Lez, Pélissier, Vaulot.

2124.

(1909, p. 143.)

Si S_1, S_2, S_3 *sont les sommes des termes d'une progression arithmétique quelconque, de leurs carrés et de leurs cubes, on a toujours*

$$9S_2^3 > 8S_1S_3.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION,

PAR M. A. DUBY.

Soient

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l$$

n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison r.

On trouve facilement, par la méthode classique,

$$S_1 = \frac{n}{2}[(n-1)r - 2a],$$

$$S_2 = \frac{n}{6}[(n-1)(2n-1)r^2 + 6a(n-1)r + 6a^2]$$

$$S_3 = \frac{n}{4}[n(n-1)^2 r^3 - 2a(n-1)(2n-1)r^2 - 6a^2(n-1)r - 4a^3].$$

En portant ces valeurs dans l'inégalité à démontrer

$$9S_2^2 > 8S_1S_3$$

il vient finalement, après réductions,

$$(n-1)^2 r^4 - 4a(n-1)^2 r^3$$
$$+ 4a^2(n-1)(n-2)r^2 + 8a^3(n-1)r - 4a^4 > 0.$$

c'est-à-dire

$$[(n-1)r^2 - 2a(n-1)r - 2a^2]^2 > 0.$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Autres solutions de Mlle A.-D. BETTS, MM. AGRONOMOF, BOUVAIST, GIRAUDON, RODRIGO RAVOSCO.

2125.

(1909, p. 111.)

Si deux triangles sont tels que leurs côtés se coupent deux à deux orthogonalement en trois points situés sur

une même droite, cette droite passe par le milieu du segment limité par les orthocentres des deux triangles.

(JAN DE MEZEAS.)

SOLUTION,

Par M. L. KLUG.

Soient a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 les côtés des deux triangles, se coupant deux à deux orthogonalement sur la droite t. Les cercles circonscrits aux trois triangles b_1c_1t, c_1a_1t, a_1b_1t, cercles qui sont aussi circonscrits aux triangles b_2c_2t, c_2a_2t, a_2b_2t, se coupent en un point F, foyer de deux paraboles inscrites, l'une au quadrilatère $a_1b_1c_1t$, l'autre au quadrilatère $a_2b_2c_2t$.

Soit G le point symétrique du point F par rapport à la droite t, et soient H_1 et H_2 les orthocentres des deux triangles. GH_1 et GH_2 sont les directrices des deux paraboles.

Mais les deux triangles $a_1b_1c_1$ et $a_2b_2c_2$ sont semblables et ont leurs côtés homologues rectangulaires. F est leur centre de similitude, puisque les segments limités par les sommets homologues sont vus du point F sous un angle droit. FH_1 et FH_2 sont donc rectangulaires; il en est de même des directrices des deux paraboles, qui sont parallèles respectivement aux droites de Simson du point F par rapport aux deux triangles.

Il résulte de là que les quatre points F, H_1, H_2, G sont sur un cercle de diamètre H_1H_2. Par conséquent le milieu de H_1H_2, centre de ce cercle, est sur la perpendiculaire élevée à FG en son milieu, c'est-à-dire sur la droite t.

C. Q. F. D.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, DUBY, GIRAUDON et SONDAT.

QUESTIONS.

2147. — Écrire, en employant les neuf chiffres autres que zéro, trois nombres ayant respectivement deux, trois et

quatre chiffres, tels que le troisième de ces nombres soit égal au produit des deux premiers.

On a, par exemple,

$$12 \times 483 = 5796.$$

Il y a d'autres solutions. On demande de les trouver toutes [1]. (R. B.)

2148. — Pour chaque normale à l'ellipse inclinée à 45° sur les axes de l'ellipse, le centre de courbure du pied de la normale est au milieu de la corde de l'ellipse interceptée par la normale. (E.-N. Barisien.)

2149. — On considère un point P situé sur une normale à une ellipse donnée en un point M variable, et partageant le rayon de courbure MC en deux parties ayant un rapport donné. Montrer que l'aire de la courbe lieu du point P est une fonction linéaire des aires de l'ellipse et de sa développée.

(E.-N. Barisien.)

2150. — On considère tous les triangles circonscrits à une parabole P et tels que les normales aux points de contact soient concourantes. Montrer que :

1° Les perpendiculaires élevées aux côtés de ces triangles en leurs milieux (médiatrices) sont normales à une parabole fixe P′;

2° Les milieux des côtés de ces triangles sont situés sur une parabole P″. (E.-N. Barisien.)

---

[1] Ce problème m'a été inspiré par l'Ouvrage de M. H.-E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, l'un des plus intéressants recueils de récréations mathématiques, et à coup sûr le plus original; il contient plusieurs questions de même nature.

[O¹5s]

SUR LES SURFACES DE M. APPELL;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Dans son Mémoire *Sur les déblais et les remblais* (¹), M. Appell a considéré les surfaces telles qu'un pinceau infiniment délié de normales découpe dans la surface d'une sphère donnée de centre O, à l'entrée et à la sortie, des aires équivalentes. Ces surfaces que nous désignerons, à la suite de certains géomètres, sous la dénomination de *surfaces de M. Appell*, jouissent de la propriété suivante : la projection de O sur chaque normale se fait au milieu du segment qui a pour extrémités les centres de courbure principaux. C'est à ce titre que M. Appell a consacré un Mémoire à ces surfaces : *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux* (²).

I.

1. Dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 254), j'ai établi une propriété d'invariance des congruences de normales des surfaces de M. Appell. Je dirai que les deux familles de surfaces parallèles de M. Appell qui

(¹) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXIX, p. 133-137.

(²) *American Journal of Mathematics*, t. X, 1888, p. 175-186. — En ce qui concerne les surfaces de M. Appell et les surfaces de M. Goursat, on pourra consulter les *Lezioni di Geometria differenziale* de Bianchi (p. 231).

se correspondent ainsi sont *conjuguées*. Une surface (S) de M. Appell étant représentée en coordonnées de Bonnet par l'équation

$$\varpi = U - V,$$

dans laquelle U et V sont des fonctions arbitraires et respectives de u et v, l'équation

$$\varpi' = i(U - V)$$

représente une des surfaces (S') conjuguées de (S). Il résulte de la définition de la transformation de droites qui fait se correspondre les deux congruences de normales de ces surfaces conjuguées que la *surface* (P) *lieu des projections* P *de l'origine* O *sur les normales aux surfaces* (S) *est identique à la surface* (N') *lieu des extrémités* N' *des moments par rapport à* O *de vecteurs égaux à l'unité portés par les normales de* (S'). En vertu de la réciprocité entre les surfaces de M. Appell conjuguées, la surface (P'), lieu des projections P' de O sur les normales de (S'), est identique à la surface (N), lieu des extrémités N des moments par rapport à O de vecteurs égaux à l'unité portés par les normales de (S).

Les coordonnées cartésiennes p_4, p_5, p_6 du point N sont

$$p_4 = \frac{i}{2}(1 - u^2)U' - \frac{i}{2}(1 - v^2)V',$$

$$p_5 = -\frac{1}{2}(1 - u^2)U' - \frac{1}{2}(1 - v^2)V',$$

$$p_6 = iuU' - ivV';$$

dans ces formules, U' et V' représentent les dérivées des fonctions respectives U de u et V de v. De ces formules, analogues aux formules d'Enneper pour les surfaces minima, il résulte que les *surfaces lieux des*

points moyens des congruences de normales des surfaces de M. Appell sont des surfaces de translation; les deux courbes qui définissent une surface de cette nature sont des courbes tracées sur des cônes isotropes.

Je n'insiste pas sur l'analogie des formules précédentes avec celles d'Enneper : dans les Mémoires cités, M. Appell a suffisamment mis en évidence l'analogie avec les surfaces minima [1].

Comme exemples de surfaces de M. Appell conjuguées, je citerai la surface de révolution qui admet pour développée un paraboloïde de révolution de foyer O [2] et la surface de M. Appell que j'ai considérée dans deux Notes précédentes [3]; leurs équations respectives sont

$$\varpi = \log(uv), \qquad \varpi' = i \log \frac{u}{v};$$

pour ces deux surfaces, (N) et (P) sont des plans. Comme exemple de surface (N) et, par conséquent, de surface (P), je citerai la surface d'équation cartésienne

$$z^4 + 8xz^2 - 16(y^2 + z^2) = 0,$$

qu'on obtient pour

$$\varpi = 2i(v - u);$$

cette surface (N) est une surface de Steiner; elle est

---

(1) *Sur les déblais et les remblais*, p. 136; *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux*, p. 182.

(2) Pages 155 et 180 des Mémoires cités de M. Appell.

(3) *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies*, p. 23; *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques*, p. 37 (*Nouvelles Annales*, 1910).

engendrée par une biquadratique, intersection d'une sphère et d'un cylindre parabolique variables.

2. *Généralisation des surfaces de M. Appell.* — Étant donnée une surface quelconque (S), définie en coordonnées de Bonnet, considérons la surface (N) qui est le lieu des extrémités N des moments, par rapport à un point fixe O, de vecteurs égaux à l'unité portés par les normales de (3). Les coordonnées cartésiennes p_4, p_5, p_6 du point N sont

$$p_4 = \frac{i}{2}(1+uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)} = \frac{i}{2}(1-u^2)p - \frac{i}{2}(1-v^2)q.$$

$$p_5 = \frac{i}{2}(1+uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_2)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}(1-u^2)p - \frac{1}{2}(1-v^2)q.$$

$$p_6 = \frac{i}{2}(1+uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_3)}{\partial(u, v)} = iup - ivq.$$

Dans ces formules, p et q désignent les dérivées partielles $\frac{\partial\varpi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varpi}{\partial v}$ de la distance ϖ de O au plan tangent de (S) au point (u, v); nous désignerons par r, s, t les dérivées secondes.

Lorsque la surface (S) est une surface de M. Appell, ayant le point O pour développée moyenne, la surface (N) est de translation et, par conséquent, les courbes coordonnées $u =$ const. et $v =$ const. sont conjuguées sur cette surface (N). Cherchons les surfaces (S) qui sont telles que les courbes $u =$ const. et $v =$ const. soient conjuguées sur les surfaces (N) correspondantes.

Prenons pour coefficients directeurs N_1, N_2, N_3 de la normale en N à (N) les jacobiens

$$N_1 = \frac{\partial(p_5, p_6)}{\partial(u, v)}, \qquad N_2 = \frac{\partial(p_6, p_4)}{\partial(u, v)}, \qquad N_3 = \frac{\partial(p_4, p_5)}{\partial(u, v)};$$

introduisons les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point P

$$x_0 = \frac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial v} + q\frac{\partial p_1}{\partial u}\right), \qquad \ldots,$$

et posons, l'indice j ayant successivement les valeurs 1, 2 et 3,

$$\begin{aligned} n_j = {} & \frac{1}{2}(1-uv)^2(rt-s^2)p_j \\ & + pq\left[2uvp_j + (1+uv)\left(u\frac{\partial p_j}{\partial u} + v\frac{\partial p_j}{\partial v}\right)\right] \\ & - \frac{1}{2}(1+uv)\left\{ pt\left[2vp_j + (1+uv)\frac{\partial p_j}{\partial u}\right] \right. \\ & \qquad \left. + qr\left[2up_j + (1+uv)\frac{\partial p_j}{\partial v}\right]\right\}; \end{aligned}$$

N_1, N_2, N_3 ont pour expressions

$$N_1 = i(n_1 + x_0 s), \qquad N_2 = i(n_2 + y_0 s), \qquad N_3 = i(n_3 - z_0 s).$$

Le déterminant D′ de Gauss étant égal à

$$N_1\frac{\partial^2 p_4}{\partial u\,\partial v} + N_2\frac{\partial^2 p_5}{\partial u\,\partial v} - N_3\frac{\partial^2 p_6}{\partial u\,\partial v},$$

la condition pour que les courbes coordonnées soient conjuguées sur (N) est $D' = 0$; la surface (S) satisfait donc à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre

$$\begin{aligned} & [(1+uv)(pt+qs) - 2upq]\frac{\partial s}{\partial u} \\ & \quad - [(1+uv)(qr+ps) - 2vpq]\frac{\partial s}{\partial v} \\ & = 2s[u(qr+ps) - v(pt-qs)]; \end{aligned}$$

cette équation peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial[pq(1-uv)^2, s(1-uv)^2]}{\partial(u, v)} = 0;$$

observons que la distance Δ de O à la normale est

donnée par la formule

$$\Delta^2 = pq(1 - uv)^2$$

et que la somme des rayons principaux de courbure est

$$R_1 + R_2 = (1 - uv)^2 s - 2\varpi;$$

nous obtenons alors le théorème suivant :

Pour que les courbes coordonnées $u =$ const. *et* $v =$ const. *soient conjuguées sur la surface* (N), *il faut et il suffit que* (S) *soit la surface la plus générale pour laquelle il existe une relation entre la distance* Δ *de* O *à la normale et l'excès*

$$R_1 + R_2 - 2\varpi$$

de la somme des rayons principaux de courbure sur le double de la distance de O *au plan tangent.*

3. Un premier exemple intéressant est celui des surfaces (S) qui jouissent de la propriété suivante : soient P la projection de O sur la normale ; μ le point moyen sur cette normale, c'est-à-dire le point équidistant des deux centres principaux de courbure ; le segment Pμ est vu de O sous un angle constant θ. L'équation de ces surfaces (S) est

$$s = 2 \operatorname{tang} \theta \frac{\sqrt{pq}}{1 - uv}.$$

On reconnaît là une curieuse équation étudiée par M. Goursat [1] ; il résulte d'un théorème de M. Goursat

---

[1] *Sur une équation aux dérivées partielles* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXV, 1896, p. 43) ; *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1899, p. 45).

que *si le segment* $P\mu$ *de normale de* (S) *est vu du point* O *sous un angle dont la tangente trigonométrique est un nombre entier, la surface* (S) *est déterminable sans quadrature.*

4. Un second exemple est celui pour lequel il existe une relation linéaire entre $P\mu$ et $\overline{OP}^2$; soit

$$R_1 + R_2 = 2\varpi - b - \frac{\Delta^2}{a}$$

cette relation, a et b étant des constantes quelconques.

Dans le cas où a est infini, c'est-à-dire dans le cas d'une relation

$$R_1 - R_2 = 2\varpi - b,$$

l'équation des surfaces S est

$$(1 - uv)^2 s = b,$$

et son intégrale est

$$\varpi = U + V - b \log(1 - uv);$$

ce cas, qui contient celui des surfaces de M. Appell ($b = 0$), étant écarté, l'équation à intégrer est

$$(S) \qquad as - pq = \frac{ab}{(1 + uv)^2};$$

en effectuant la transformation

$$\varpi = a \log \varpi',$$

celle-ci devient

$$(S') \qquad (1 - uv)^2 s' = \frac{b}{a} \varpi'.$$

On reconnaît là l'équation des *surfaces de M. Goursat* (¹); les cas d'intégration par la méthode de Laplace

---

(¹) *Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au*

sont

$$b = -m(m+1)a,$$

m étant entier; l'intégrale correspondante de l'équation des surfaces (S) est

$$\varpi = a \log \left[\sum_{n=0}^{n=m} a_n \frac{u^n V^{(m-n)} - v^n U^{(m-n)}}{(1-uv)^n} \right];$$

dans cette expression, $U^{(m-n)}$ et $V^{(m-n)}$ désignent les dérivées d'ordre $m-n$ des fonctions arbitraires U de u et V de v; on a posé

$$a_1 = -m(m-1),$$
$$a_n = \frac{a_1(a_1-1.2)(a_1-2.3)\ldots[a_1-(n-1)n]}{n!}.$$

Je signalerai, incidemment, une propriété des surfaces (S) dans le cas $b = -6a$, cas le plus simple après celui des surfaces de M. Appel et celui des surfaces minima. La transformation

$$\varpi_1 = 2e^{\frac{\varpi}{a}} + \frac{1}{3}k^2,$$

k désignant une constante quelconque, transforme les surfaces (S) en les surfaces (S_1) intégrales de

$$(1-uv)^2(\varpi_1 s_1 - p_1 q_1) - 3\varpi_1^2 - k^2 = 0;$$

celles-ci jouissent de la propriété caractéristique suivante : soient M_1 un point de S_1; μ_1' le symétrique du point moyen μ_1 de la normale à S_1 par rapport à M_1;

---

plan tangent (*American Journal of Mathematics*, t. X, p. 187-204). — L'équation aux dérivées partielles avait été rencontrée dans diverses questions de Géométrie et de Physique; M. Darboux lui avait consacré une Note : *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. XCV, 1882, p. 69).

la sphère de diamètre $M_1\mu_1'$ *est orthogonale à une sphère fixe;* cette sphère fixe a son centre en O et son rayon est k. Ces surfaces S_1 comprennent, comme cas particulier, les quadriques qui admettent la sphère fixe pour sphère de Monge.

II.

Lorsque les surfaces (N), (P), relatives à une surface quelconque (S) et au point O, satisfont à certaines conditions, les surfaces correspondantes (S) sont les intégrales d'équations aux dérivées partielles qui, dans certains cas, peuvent être des équations de Monge-Ampère. Nous allons en donner des exemples.

Nous supposerons que la surface (N) est une véritable surface. *Dans le cas où* (S) *est une surface dont les normales touchent une sphère de centre* O, *et dans ce cas seulement, la surface* (N) *dégénère en une courbe.* Pour engendrer, en effet, une surface dont les normales touchent une sphère, on doit considérer une famille quelconque à un paramètre de grands cercles et la congruence des tangentes à ces cercles : (N) est donc la courbe sphérique transformée apsidale, par rapport à O, de la sphère envisagée comme ensemble de cette famille de grands cercles. N_1, N_2, N_3 sont alors nuls et, par suite aussi, les déterminants de Gauss.

Cette remarque explique l'existence de l'intégrale intermédiaire

$$pq(1+uv)^2 = \text{const.}$$

de plusieurs équations de ce Mémoire.

5. *Condition pour que les normales en* P *à* (P) *et en* N *à* (N) *concourent.* — Nous avons donné plus

haut les expressions des coefficients directeurs N_1, N_2 et N_3 de la normale à (N); avec les mêmes notations, on peut prendre pour coefficients directeurs de la normale à (P)

$$P_1 = i(n_1 - x_0 s), \qquad P_2 = i(n_2 - y_0 s), \qquad P_3 = i(n_3 - z_0 s).$$

Écrivons la condition pour que les normales à (N) et (P) concourent sous la forme

$$\Sigma(N_1 - P_1)[(N_2 p_6 - N_3 p_5) - (P_1 z_0 - P_3 y_0)] = 0:$$

elle devient

$$\Sigma x_0 (N_2 p_6 - N_3 p_5) = 0$$

et, sous cette forme, elle exprime que OP rencontre la normale à la surface (N) en N : les normales en P à (P) et en N à (N) sont donc dans le plan OPN; on est ainsi conduit au théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les normales en P *à la surface* (P) *et en* N *à la surface* (N) *soient concourantes est que ces surfaces* (P) *et* (N) *soient transformées apsidales l'une de l'autre par rapport à* O.

(S) est alors l'intégrale d'une équation de Monge-Ampère à systèmes de caractéristiques confondus

$$\begin{aligned}&(rt - s^2)(1 - uv)^2\\&\quad - 2qu(1 - uv)r - 2pv(1 - uv)t - 4uvpq = 0:\end{aligned}$$

cette équation admet une intégrale intermédiaire

$$pq(1 - uv)^2 = \text{const.}$$

qui représente les surfaces dont les normales touchent les sphères de centre O.

6. *Condition d'orthogonalité des normales en* P

à (P) *et en* N *à* (N). — Dans le cas précédent, (P) et (N) étant transformées apsidales l'une de l'autre, les normales en P et N sont orthogonales. Cherchons, plus généralement, la condition d'orthogonalité entre les normales en P et N.

Cette condition

$$\Sigma N_1 P_1 = n_1^2 + n_2^2 - n_3^2 + s^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$$

conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui se décompose en deux équations de Monge-Ampère. L'une d'elles est l'équation du n° 5; elle exprime que (P) et (N) sont transformées apsidales. La seconde est

$$(rt - s^2)(1 - uv) - 2uqr + 2vpt - 4pq = 0$$

ou

$$\frac{\partial(\sqrt{p} - v\sqrt{q}, \sqrt{q} + u\sqrt{p})}{\partial(u, v)} = 0.$$

Effectuons la transformation de contact définie par les formules

$$p = u_1^2, \qquad q = v_1^2, \qquad u = \frac{p_1}{u_1}, \qquad v = \frac{q_1}{v_1};$$

cette équation se transforme en l'équation de la *Théorie de la chaleur*

$$r_1 t_1 - s_1^2 - 1 = 0,$$

et, par suite, son intégrale générale est, en désignant par A une fonction arbitraire d'une variable α, par B une fonction arbitraire d'une variable β, et par A' et B' les dérivées de ces fonctions

$$u = \frac{\alpha - \beta}{B' - A'}, \qquad v = \frac{A' - B'}{\alpha - \beta},$$

$$\varpi = 4(B - A) - 2(\alpha A' - \beta B').$$

On peut encore appliquer la transformation de con-

tact

$$p = u_2^2, \qquad q = q_2^2, \qquad u = -\frac{p_2}{u_2}, \qquad v = \frac{v_2}{q_2};$$

qui transforme l'équation à intégrer en l'équation de Laplace

$$r_2 - t_2 = 0.$$

7. *Condition pour que* (N) *soit un cône de sommet* O. — La surface (N) est un cône de sommet O lorsqu'on a

$$\Sigma N_1 p_1 = \frac{1}{2}(q^2 r - p^2 t)(1 + uv)^2 - pq(qv - pu)(1 + uv) = 0;$$

on reconnaît là l'équation des surfaces de Monge [1]

$$\frac{\partial[pq(1 + uv)^2, \varpi]}{\partial(u, v)} = 0.$$

Ainsi :

Pour que (N) *soit un cône de sommet* O, *il faut et il suffit que* (S) *soit une surface de Monge, admettant* O *pour sommet du cône-développée.*

La surface (P) est alors une surface de Monge.

Je ferai remarquer incidemment que la transformation de contact employée au n° 6 et qui est définie par les formules

$$p = u_2^2, \qquad q = q_2^2, \qquad u = -\frac{p_2}{u_2}, \qquad v = \frac{v_2}{q_2},$$

permet de transformer l'équation, en coordonnées de Bonnet, des surfaces dont les normales touchent une sphère de centre O, en l'équation, en coordonnées cartésiennes, des hélicoïdes dont les normales appar-

---

[1] C'est l'équation donnée à la page 311 des *Nouvelles Annales* de 1909.

tiennent à un complexe linéaire d'axe Oz. En remarquant, en outre, que toutes les surfaces de Monge dérivent des surfaces dont les normales touchent une sphère par un changement arbitraire de fonction ϖ, on voit qu'on peut prendre pour équations des surfaces de Monge

$$u = \frac{\tang\theta}{\rho^2} - \frac{R'}{\rho}, \qquad v = \frac{1}{\dfrac{\cot\theta}{\rho^2} + \dfrac{R'}{\rho}},$$

$$\varpi = F\left(\theta + R - \frac{1}{2}\rho R'\right);$$

ces formules sont prolongées par les suivantes

$$p = \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2\theta\, F',$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\rho} - \sin\theta R'\right)^2 F':$$

θ et ρ sont deux variables; R est une fonction arbitraire de ρ, de dérivée R'; F est une fonction arbitraire de

$$\theta - R - \frac{1}{2}R'\rho$$

et F' est la dérivée de cette fonction.

III.

Dans cette troisième Partie, je donnerai une nouvelle démonstration du théorème fondamental d'invariance des congruences des normales des surfaces de M. Appell. A cet effet, j'introduirai une nouvelle représentation analytique des congruences de normales [1].

---

[1] Je ne donnerai ici que les éléments indispensables de cette théorie des congruences de normales : elle sera exposée complètement dans un long travail que je publierai par la suite, et que

8. *Toute congruence de normales peut être définie analytiquement par une fonction homogène et de degré zéro des trois cosinus directeurs des rayons de la congruence.*

Soient, en effet, p_1, p_2, p_3 les cosinus directeurs du rayon D et x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection P sur D de l'origine O des axes de coordonnées rectangulaires. Pour qu'une congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que l'expression

$$x_0\, dp_1 + y_0\, dp_2 - z_0\, dp_3$$

soit une différentielle exacte.

Dans ces conditions, posons

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \qquad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \qquad z_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_3},$$

$\Pi(p_1, p_2, p_3)$ étant une fonction homogène et de degré zéro des trois lettres p_1, p_2, p_3 : les dérivées partielles sont calculées comme si p_1, p_2, p_3 étaient indépendants.

L'identité d'Euler exprime que (x_0, y_0, z_0) est la projection sur D de l'origine O; et la relation identique

$$x_0\, dp_1 + y_0\, dp_2 - z_0\, dp_3 = d\Pi$$

exprime que la congruence est une congruence de normales.

Réciproquement, donnons-nous une congruence de normales : elle sera définie par une des surfaces orthogonales (S); nous considérerons cette surface, en coordonnées tangentielles, comme enveloppe du plan

$$X p_1 + Y p_2 + Z p_3 = \varpi :$$

---

j'ai annoncé à la fin de mon Mémoire : *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 40).

ϖ est une fonction donnée des paramètres de direction de la normale, ou encore de p_1, p_2, p_3; en tenant compte de la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

ϖ peut être, et d'une seule manière, rendue homogène et de degré zéro en p_1, p_2, p_3 : soit Π cette fonction.

ϖ est la distance de O au plan tangent à (S); les coordonnées cartésiennes x, y, z du point de contact seront

$$x = x_0 - \varpi p_1, \qquad y = y_0 - \varpi p_2, \qquad z = z_0 + \varpi p_3$$

et, pour un déplacement quelconque sur S, on aura

$$p_1\, dx + p_2\, dy + p_3\, dz = 0.$$

c'est-à-dire

$$p_1\, dx_0 + p_2\, dy_0 + p_3\, dz_0 = -d\varpi = -d\Pi,$$
$$x_0\, dp_1 + y_0\, dp_2 + z_0\, dp_3 = d\Pi.$$

Cette dernière relation exprime que x_0, y_0, z_0 sont les dérivées partielles de Π, en regardant p_1, p_2, p_3 comme indépendants.

En résumé, pour avoir une congruence de normales, il suffit de se donner une telle fonction Π et de poser

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \qquad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \qquad z_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_3};$$

en supposant ensuite que p_1, p_2, p_3 sont les cosinus directeurs d'une droite et x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection de O, on obtient un rayon d'une congruence générale de normales.

9. Comme je l'ai dit plus haut, je réserve l'étude plus approfondie de cette représentation des congruences de normales et de ses applications aux formes fondamentales, au problème de Transon, etc.

Dans le but de montrer comment doivent être faits les calculs, dans la représentation considérée, je donnerai toutefois quelques exemples de résolution de problèmes de Transon.

Un complexe quelconque peut toujours être représenté par une équation

$$f(x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, p_3) = 0.$$

Prenons, par exemple, le complexe d'équation

$$x_0 \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_2, p_3)} - y_0 \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_3, p_1)} - z_0 \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_1, p_2)} = 0,$$

dans laquelle M et M′ sont des fonctions homogènes de même degré de p_1, p_2, p_3. La détermination des congruences de normales appartenant à ce complexe (problème de Transon) est équivalente à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_2, p_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial p_2} \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_3, p_1)} + \frac{\partial \Pi}{\partial p_3} \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_1, p_2)} = 0;$$

on a donc

$$\Pi = \text{fonction arbitraire de } \frac{M}{M'}.$$

Si, en particulier, M et M′ sont des formes linéaires en p_1, p_2, p_3, un changement d'axes permet de se ramener au cas du complexe

$$z_0 = 0$$

des droites équidistantes de deux points. La solution

$$\Pi = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

coïncide bien avec celle

$$\varpi = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

donnée dans mon Mémoire : *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard...* (p. 35).

Soit, en second lieu, le complexe tétraédral attaché au tétraèdre fondamental d'une quadrique; son équation étant

$$\sum \frac{C - B}{A} p_2 p_3 x_0 = 0,$$

on a alors

$$M = A p_1^2 - B p_2^2 - C p_3^2,$$
$$M' = A^2 p_1^2 - B^2 p_2^2 - C^2 p_3^2,$$

et la solution du problème de Transon est

$$\Pi = f\left(\frac{A p_1^2 - B p_2^2 - C p_3^2}{A^2 p_1^2 - B^2 p_2^2 - C^2 p_3^2}\right).$$

La méthode de la fonction homogène est éminemment propre à la résolution du problème de Transon pour les complexes admettant une surface podaire, c'est-à-dire tels que les projections d'un point fixe O sur les rayons soient sur une surface donnée [1]. Deux cas sont à considérer : ou bien la surface podaire est un cône de sommet O et le problème ne présente alors aucune difficulté, ou bien la surface est quelconque; dans ce second cas, l'intégration de l'équation du problème peut être ramenée à une équation de Jacobi.

Le cas le plus simple est celui pour lequel la surface podaire est un plan ($z_0 = a$) ne passant pas par O. On a alors

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_3} = \frac{a}{\sqrt{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}},$$

---

[1] Cette même question se pose aussi à la seconde partie de ce Mémoire : *déterminer* (S) *par la condition que* (P) *soit une surface donnée.*

J'ai donné une solution géométrique, déduite d'un théorème de M. Darboux, dans le cas d'un cône de sommet O, au paragraphe 9 de mon Mémoire : *Conséquence de deux théorèmes de M. Bricard...* (p. 34).

d'où

$$\Pi = a \log \frac{\sqrt{p_1^2 - p_2^2 - p_3^2} - p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2} - p_3} - f\left(\frac{p_1}{p_2}\right);$$

cet exemple montre bien quelles précautions doivent être prises dans l'emploi de la fonction Π.

10. Revenons aux congruences de normales des surfaces de M. Appell.

Soit une congruence Π de normales et soit la congruence, supposée être une congruence de normales Π', qui lui correspond dans la transformation de droites que j'ai étudiée dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 249). On aura

$$\Pi'(p'_1, p'_2, p'_3) = \Pi'(-p_1, -p_2, -p_3) = \Pi'(p_1, p_2, p_3),$$

puisque Π' est homogène, de degré pair. Exprimons alors les conditions géométriques

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2,$$
$$xx'_0 + yy'_0 + zz'_0 = 0;$$

elles se résument en une seule

$$\Delta_1(\Pi + i\Pi') = 0,$$

Δ_1 étant l'invariant différentiel du premier ordre.

Posons

$$\Pi_1 = \Pi + i\Pi';$$

Π_1 est homogène et de degré zéro et représente une congruence de normales; la condition $\Delta_1 \Pi_1 = 0$ exprime que les rayons de la congruence sont à une distance nulle de l'origine O. Une telle congruence est formée par les normales à une surface pour laquelle ϖ est fonction quelconque soit de u, soit de v, en coordonnées de

Bonnet. On a donc

$$\Pi_1 = \Pi - i\Pi' = 2V(v)$$

et, pour la même raison,

$$\Pi - i\Pi' = 2U(u),$$

ce qui conduit aux équations

$$\varpi = \Pi = U + V, \qquad \varpi' = \Pi' = i(U - V),$$

données au début de mon Mémoire pour les surfaces de M. Appell conjuguées.

11. Pour terminer, je signalerai un résultat sur des surfaces remarquables considérées par Bonnet et par M. Appell.

Lorsque le déblai et le remblai sont des aires planes homogènes et de même densité, les routes sont normales à des surfaces pour lesquelles les milieux des segments ayant pour extrémités les centres principaux de courbure sont dans un plan [1]; de telles surfaces ont été étudiées et transformées en les surfaces minima par Bonnet dans divers Mémoires cités par M. Appell.

Ces surfaces de Bonnet sont, en d'autres termes, les surfaces qui jouissent de la propriété suivante : la sphère ayant pour diamètre le segment de normale dont les extrémités sont les centres principaux de courbure est orthogonale à un plan fixe. Je me propose, plus généralement, de déterminer les surfaces (S) telles que la *sphère ayant pour diamètre le segment de normale compris entre les centres principaux de courbure soit orthogonale à une sphère fixe.*

Soient O et k le centre et le rayon de cette sphère

---

[1] *Sur les déblais et les remblais*, p. 107.

fixe; l'équation des surfaces (S), en coordonnées de Bonnet,

$$(1 - uv)^2(\varpi s - pq) - \varpi^2 + k^2 = 0,$$

se transforme en

$$(1 - uv)^2 s' - k^2 e^{-2\varpi} - 1 = 0,$$

en posant $\varpi = e^{\varpi'}$; cette dernière équation n'est autre que celle que Weingarten a rencontré dans la théorie de la déformation des surfaces, et qu'il a réduite à l'équation de Liouville [1].

[12g]

SUR LA DÉTERMINATION MATHÉMATIQUE DES DROITS DE SUCCESSION DES ENFANTS NATURELS;

PAR M. HENRY PICQUET,

Commissaire-Contrôleur des Sociétés d'assurances sur la vie au Ministère du Travail.

L'ancien article 757 du Code civil était ainsi conçu :

« Le droit de l'enfant naturel sur les biens de ses père ou mère est réglé ainsi qu'il suit : Si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes, ce droit est d'un tiers de la portion héréditaire que l'enfant naturel aurait eue s'il eût été légitime; il est de moitié lorsque les père ou mère ne laissent pas de descendants, mais

---

[1] WEINGARTEN, *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Comptes rendus*, t. CXII, 1891, p. 706). — GOURSAT, *Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. V, 1891, p. 24); *Sur la théorie des surfaces applicables* (*Comptes rendus*, t. CXII, 1891, p. 707).

bien des ascendants, ou des frères et sœurs; il est des trois quarts lorsque les père et mère ne laissent ni descendants, ni ascendants, ni frères, ni sœurs. »

La loi du 25 mars 1896 a modifié ces dispositions et dit, entre autres choses :

Art. 758. — Le droit héréditaire de l'enfant naturel dans la succession de ses père et mère est fixé ainsi qu'il suit :

Si le père ou la mère a laissé des descendants légitimes, ce droit est de la moitié de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime.

Art. 759. — Le droit est des trois quarts, lorsque les père ou mère ne laissent pas des descendants, mais bien des ascendants, ou des frères et sœurs, ou des descendants légitimes de frères ou sœurs.

Art. 760. — L'enfant naturel a le droit à la totalité des biens lorsque ses père ou mère ne laissent ni descendants, ni ascendants, ni frères ou sœurs, ni descendants légitimes de frères ou sœurs.

Ainsi donc, tant dans l'ancien article 757 que dans les articles 758 et 759 nouveaux, *en prenant la loi à la lettre*, le droit d'un enfant naturel est une certaine quotité *de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime.*

Or, dans la pratique, *lorsqu'il y a plusieurs enfants naturels*, ce texte-là n'est pas respecté.

En ce qui concerne l'article 758, c'est-à-dire si plusieurs enfants naturels sont en concours avec des enfants légitimes, on suppose *tous les enfants* légitimes, puis on enlève à chaque enfant naturel la moitié (anciennement les deux tiers) de sa part; le total de ces

réductions est également réparti entre les frères légitimes.

Ce procédé, bien que consacré par la jurisprudence, n'est pas légal : l'un quelconque des enfants naturels n'a pas reçu la moitié de ce qu'il aurait eu s'il eût été légitime. Pour mieux me faire comprendre, supposons que deux enfants naturels soient en concours avec deux enfants légitimes; d'après le système de la jurisprudence actuelle, chaque enfant naturel a droit à la moitié du quart, soit au huitième de la succession : d'après la loi, chaque enfant naturel a droit à la moitié de ce qu'il aurait eu s'il eût été légitime : or, s'il eût été légitime, *il y aurait eu trois enfants légitimes et un enfant naturel*, ce dernier aurait eu $\frac{1}{8}$ de la succession, chacun des trois enfants légitimes aurait eu le tiers des sept autres huitièmes, soit $\frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$; si donc, revenant à l'exemple choisi, un des enfants naturels eût été légitime, il aurait eu droit à $\frac{7}{24}$; étant naturel, il a droit à la moitié, soit $\frac{7}{48}$, valeur sensiblement supérieure à $\frac{1}{8}$.

En ce qui concerne l'article 759, c'est-à-dire si plusieurs enfants naturels sont en concours avec des ascendants ou des collatéraux privilégiés, la pratique leur attribue en bloc les $\frac{3}{4}$ de la succession qu'ils partagent par parts viriles. Et pourtant rien ne découle moins de la lettre de la loi; celle-ci dit, en effet : « Le droit est des trois quarts, lorsque... » Quel droit? Celui dont il vient d'être parlé à l'article précédent et qui est basé sur « la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime. » En d'autres termes, l'article 759 dit : « Lorsque les père ou mère ne laissent pas..., le droit héréditaire de l'enfant naturel dans la succession de ses père

et mère *est des trois quarts de la portion héréditaire qu'il aurait eue s'il eût été légitime* » et nous retombons identiquement sur les raisonnements du cas précédent.

Nous nous trouvons donc en présence d'un texte de loi dont la lettre est sciemment violée dans la pratique; je dis *sciemment*, car tous les jurisconsultes ont reconnu cette violation et plusieurs formules mathématiques ont été proposées pour l'application exacte des données de l'ancien article 757 ou de l'article 758 nouveau.

D'autre part, il ne fait pour moi aucun doute que ce sont les méthodes adoptées dans la pratique *qu'a voulues* le législateur, bien que les textes n'aient pas traduit sa pensée. En premier lieu, une application exacte du texte de la loi donne lieu, ainsi qu'on le verra plus loin, à des formules, qui, bien qu'obtenues par des raisonnements simples, sont trop compliquées pour avoir pu être prévues par la loi. En second lieu, et c'est le meilleur argument, la méthode de la pratique existait depuis près d'un siècle lorsque fut votée la loi de 1896 qui a néanmoins conservé exactement les termes : « ... portion héréditaire que l'enfant naturel aurait eue s'il eût été légitime... ». Enfin une application stricte du texte de l'article 759, lorsqu'il y a plusieurs enfants naturels, conduit à des résultats absurdes, ainsi qu'on le verra plus loin. Mais l'objet de la présente Note n'est pas juridique. A-t-on raison de procéder comme on le fait en pratique? Je le crois, pour les raisons que je viens d'indiquer, mais c'est là un point sur lequel je ne veux point insister. Je veux, au contraire, à un point de vue purement théorique, m'occuper des formules mathématiques auxquelles donnerait lieu l'application rigoureuse de l'article 758 du Code civil.

Je commencerai par défendre la mémoire d'un

célèbre savant, Eugène Catalan, qui, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1863), a indiqué la formule rigoureuse, résultant de l'application stricte de l'ancien article 757, et déterminant la part de l'enfant naturel en concours avec des enfants légitimes. M. le professeur Émile Chénon, dans une brochure intitulée : « *Des droits successifs des enfants naturels en concours avec des enfants légitimes* (Larose, 1898), dit en effet : « Malheureusement, M. Catalan, n'étant pas jurisconsulte, traduisit inexactement les données légales et aboutit, d'abord à une formule fausse, et ensuite à la même conclusion inadmissible que ses devanciers. »

Or je vais prouver que Catalan a, d'une part, appliqué strictement les données légales et, d'autre part, indiqué une formule exacte. Quant à la conclusion inadmissible, j'en parlerai plus loin.

Catalan, dans les *Nouvelles Annales*, a simplement indiqué la formule, qui avait été donnée antérieurement par Cournot (*Bulletin de Férussac*). J'ignore comment cet auteur l'a établie, mais je vais la rétablir par un raisonnement des plus simples (en supposant la réduction de moitié prévue dans la loi de 1896).

Désignons par l le nombre des enfants légitimes et n le nombre des enfants naturels. Si l'un des n enfants naturels eût été légitime (c'est bien là le texte de la loi), *il y aurait eu* $l + 1$ *enfants légitimes et* $n - 1$ *enfants naturels ;* en appliquant donc la loi à la lettre la portion héréditaire qu'aurait eue, dans l'exemple initial, un des enfants naturels s'il eût été légitime est la portion héréditaire qu'aurait un enfant légitime dans le cas de $l + 1$ enfants légitimes et $n - 1$ enfants naturels. Tel est l'axiome fondamental qui « traduit exactement les données légales » et qui est la base de tout le raisonnement.

Désignons par $x(l,n)$ la part revenant à chaque enfant légitime, par $y(l,n)$ la part revenant à chaque enfant naturel, lorsqu'il y a l enfants légitimes et n enfants naturels.

On a, en traduisant l'axiome ci-dessus par une égalité mathématique,

$$\text{(I)} \qquad y(l,n) = \frac{1}{2}x(l+1, n-1).$$

D'autre part, désignons par 1 la masse successorale, il vient

$$\text{(II)} \qquad l\,x(l,n) + n\,y(l,n) = 1,$$

d'où

$$l\,x(l,n) - \frac{n}{2}x(l+1, n-1) = 1$$

ou

$$\text{(III)} \qquad x(l,n) = \frac{1}{l} - \frac{n}{2l}x(l+1, n-1).$$

On arrive donc à une relation récurrente; en donnant successivement à l les valeurs l, $l+1$, ..., $l+n$ et, corrélativement à n les valeurs n, $n-1$, ... jusqu'à zéro, on obtient les égalités suivantes :

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} x(l,n) & = \dfrac{1}{l} & - \dfrac{n}{2l}x(l-1, n-1), \\ x(l-1, n-1) & = \dfrac{1}{l-1} & - \dfrac{n-1}{2(l-1)}x(l-2, n-2), \\ x(l-2, n-2) & = \dfrac{1}{l-2} & - \dfrac{n-2}{2(l-2)}x(l-3, n-3), \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x(l-n-1, 1) & = \dfrac{1}{l-n-1} & - \dfrac{1}{2(l-n-1)}x(l-n, 0), \\ x(l-n, 0) & = \dfrac{1}{l+n}. & \end{array} \right.$$

La valeur de $x(l+n, 0)$ est donnée par la dernière

équation ; en portant cette valeur dans l'avant-dernière équation, on aura

$$x(l-n-1, 1),$$

et ainsi de suite en remontant jusqu'à la première équation qui donnera

$$x(l, n).$$

Connaissant $x(l, n)$, l'équation (II) donnera

$$\text{(V)} \qquad y(l, n) = \frac{1}{n} - \frac{l}{n} x(l, n).$$

En résolvant le système (IV) ainsi que je viens de dire, on trouve

$$\text{(VI)} \quad x(l, n) = \frac{1}{l} - \frac{n}{2l(l+1)} - \frac{n(n-1)}{2^2 l(l+1)(l-2)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3 l(l-1)(l-2)(l+3)} + \ldots$$
$$- (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{2^n l(l-1)\ldots(l-n)}.$$

qui est la formule de Catalan [1].

On en déduit

$$\text{(VII)} \quad y(l, n) = \frac{1}{2(l-1)} - \frac{n-1}{2^2(l+1)(l-2)}$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)}{2^3(l-1)(l-2)(l-3)} - \ldots$$
$$- (-1)^n \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{2^n(l-1)\ldots(l-n)}.$$

Telles sont les solutions du problème. Dans les cas

---

[1] La formule de Catalan comportait, aux dénominateurs, les puissances successives de 3 au lieu des puissances de 2, puisque l'ancien article 757 du Code civil donnait à l'enfant naturel le tiers (et non la moitié) de ce qu'il aurait eu s'il eût été légitime.

les plus fréquents qui peuvent se présenter, ces formules se composent de peu de termes très faciles à calculer; les tableaux suivants peuvent donner une idée précise des applications que donneraient ces formules dans la pratique.

I.

Valeurs de $y(l, n)$ (part de l'enfant naturel) dans les différents cas qui peuvent se présenter lorsque le nombre total des enfants est inférieur à 8. La masse successorale est supposée égale à 1000^{fr} et les parts sont arrondies en nombres entiers de francs.

On a mis entre parenthèses, pour comparaison, les valeurs adoptées dans la pratique.

		n.					
l.		1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.		250	208	177	153	134	119
		(250)	(167)	(125)	(100)	(83)	(71)
2.		167	146	129	116	104	
		(167)	(125)	(100)	(83)	(71)	
3.		125	113	102	93		
		(125)	(100)	(83)	(71)		
4.		100	92	85			
		(100)	(83)	(71)			
5.		83	77				
		(83)	(71)				
6.		71					
		(71)					

II.

Valeurs de $x(l, n)$ (part de l'enfant légitime) dans les mêmes conditions que ci-dessus :

l.	n. 1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.	750	583	469	388	328	283
	(750)	(667)	(625)	(600)	(583)	(571)
2.	417	354	306	269	235	
	(417)	(375)	(350)	(333)	(321)	
3.	292	258	231	209		
	(292)	(267)	(250)	(238)		
4.	225	204	187			
	(225)	(208)	(196)			
5.	183	169				
	(183)	(171)				
6.	155					
	(155)					

D'autre part, M. Émile Chénon, qui est aussi un mathématicien, croyant que les formules précédentes étaient inexactes, fut tenté par le désir d'en établir de vraies. Il s'est malheureusement glissé une erreur dans son raisonnement que je cite *in extenso :*

« Soient S la masse successorale, m le nombre des enfants légitimes, et x la part qui revient à chacun d'eux; n le nombre des enfants naturels, et y la part qui revient à chacun d'eux; z la réduction inconnue que doit subir chaque enfant naturel.

» On a tout d'abord l'équation

$$mx + ny = S. \tag{1}$$

» La part de chaque enfant légitime se compose évidemment de deux parties : d'abord de la fraction de S qu'on obtient en supposant légitimes tous les enfants naturels, soit $\frac{S}{m+n}$, plus une part virile dans le total des réductions opérées sur eux, soit $\frac{nz}{m}$; d'où l'équation

$$x = \frac{S}{m+n} + \frac{n}{m}z. \tag{2}$$

» De même, la part y de chaque enfant naturel se compose de $\frac{1}{2}\frac{S}{m+n}$, plus la moitié d'une part virile dans la somme des réductions opérées sur ses $n-1$ frères naturels (c'est bien là la moitié de ce qu'il aurait eu s'il avait été légitime); on a ainsi

$$(3) \qquad y = \frac{1}{2}\frac{S}{m-n} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}z.$$

» En remplaçant dans l'équation (1) x et y par leur valeur en fonction de z et en simplifiant, on a

$$(4) \qquad z = S\frac{n}{(m-n)(3n-1)}.$$

» En substituant cette valeur dans les équations (2) et (3), on obtient pour les valeurs de x et de y les formules suivantes

$$(A) \qquad x = S\frac{m(3n-1)-n^2}{m(m-n)(3n-1)},$$

$$(B) \qquad y = S\frac{2n-1}{(m-n)(3n-1)}. \text{ »}$$

Telles sont les formules proposées par M. Chénon.

Un seul exemple suffirait à montrer que ces résultats ne sont pas exacts. Prenons en effet le cas de trois enfants dont deux sont naturels et un légitime; les formules de M. Chénon donnent

$$m = 1, \qquad n = 2,$$

$$x = S\frac{1\times 5+4}{3\times 5} = S\frac{9}{15} = 0.6S,$$

$$y = S\frac{3}{15} = 0,2S.$$

D'autre part, nous trouvant en présence de deux enfants naturels et d'un enfant légitime, chaque enfant naturel a droit à la moitié de ce qu'il aurait s'il était

légitime; c'est-à-dire à la moitié de ce qu'il aurait *s'il y avait deux enfants légitimes et un naturel*, et qu'il soit un des deux légitimes. Or, dans ce dernier cas, qui est évident, l'enfant naturel a droit à $\frac{1}{6}$ et chaque enfant légitime a droit à la moitié du complément, soit $\frac{5}{12}$; donc, remontant au premier cas, chaque enfant naturel a droit à la moitié de $\frac{5}{12}$, soit $\frac{5}{24}$; d'où

$$y_1 = S\frac{5}{24} = 0,208\,S$$

et, par conséquent,

$$x_1 = S - 2S\frac{5}{24} = S\frac{14}{24} = 0,584\,S.$$

Mais où pèche le raisonnement de M. Chénon? Nous allons le voir en le reprenant par le commencement. La formule (1) est parfaite. De la formule (2), on ne peut pas dire qu'elle soit fausse, mais il faut noter que, dans cette formule, interviennent les deux éléments suivants :

1° $\frac{S}{m+n}$, fraction de la masse obtenue en supposant tous les enfants légitimes, supposition qui est celle de la pratique actuelle, mais qu'une application stricte de la loi repousse essentiellement;

2° Le facteur z qui, retenons-le bien, est la réduction que subit la part $\frac{S}{m+n}$ pour devenir y, *lorsqu'il y a m enfants légitimes et n enfants naturels.*

Remarquons en passant que la formule (2) serait aussi vraie en partant d'une fraction F arbitraire de la masse, et en appelant Z la réduction correspondante subie par y; et l'on aurait

$$x = F - \frac{n}{m}Z.$$

Passons maintenant à la formule (3). Il est dit que y se compose de $\frac{1}{2}\frac{S}{m+n}$, *plus la moitié d'une part virile dans la somme des réductions opérées sur ses* $n-1$ *frères naturels*. Ceci est faux. En effet, d'une telle formule découlerait que si l'enfant naturel était légitime (*cas où il y aurait* $m+1$ *enfants légitimes et* $n-1$ *enfants naturels*), sa part, et celle de chacun de ses frères légitimes, serait $\frac{S}{m+n}$, plus la $n^{\text{ième}}$ partie de la somme des $n-1$ réductions z subies par les parts naturelles *dans un tout autre cas,* celui de m enfants légitimes et n enfants naturels. Or il est certain que z n'a plus à intervenir dans l'hypothèse où m et n sont devenus $m+1$ et $n-1$. S'il y a $m-1$ enfants légitimes et $n-1$ enfants naturels, la part d'un enfant légitime sera, si l'on veut suivre un ordre d'idées analogue, $\frac{S}{m+n}$ plus une part virile dans les $n-1$ réductions subies par les enfants naturels, ces réductions n'étant plus égales à z mais à un autre facteur z_1 aussi inconnu que z *a priori;* on aurait donc

$$y = \frac{1}{2}\frac{S}{m+n} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{m-1}z_1.$$

On introduit donc une nouvelle inconnue dans la question, ce qui reculerait indéfiniment la solution du problème. Dans la *deuxième Note* de M. Chénon, la même confusion est encore faite entre z et z_1, ce qui fausse encore les résultats.

Je crois donc avoir ainsi nettement établi que la seule formule qui soit la traduction mathématique des textes légaux est la formule indiquée par Catalan.

Je reviens maintenant sur un autre point, relativement à une certaine *conséquence inadmissible* de la formule de Catalan. Je cite encore *in extenso* M. Chénon.

« Tous ces systèmes (imaginés pour remédier à l'illégalité de la pratique) aboutissent à cette conséquence, qui suffit, comme le dit très justement Demolombe, à les ruiner tous : lorsque le nombre des enfants naturels dépasse un certain chiffre, la portion de succession attribuée à ces enfants naturels, qui viennent en concours avec des enfants légitimes, est plus forte que la portion à laquelle ils ont droit lorsqu'ils sont simplement en présence d'ascendants, résultat évidemment inadmissible. » Et il est ajouté en note : « Il est superflu de faire observer qu'il n'y a pas de difficulté quand plusieurs enfants naturels sont en concours avec des ascendants ou des collatéraux privilégiés : quel que soit le nombre, il leur est toujours alloué $\frac{3}{4}$ de la succession, qu'ils partagent par parts viriles. »

Je me permettrai de faire une petite variante à ce raisonnement.

Il y a la même difficulté quand plusieurs enfants naturels sont en concours avec des ascendants ou des collatéraux privilégiés, qui existe lorsque plusieurs enfants naturels sont en concours avec des enfants légitimes, car j'ai montré plus haut que le problème était mathématiquement le même. Il y a toutefois une différence dans les deux cas. Dans le concours successoral avec des enfants légitimes, nous avons donné la formule légale qui pratiquement pourrait être adoptée sans aucun inconvénient et dont les solutions sont techniquement toujours acceptables.

Dans le concours avec des collatéraux privilégiés, au contraire, la formule légale deviendrait

$$y(0, n) = \frac{3}{4} x(1, n-1).$$

Mais, d'autre part, en appelant S la masse succes-

sorale, on doit avoir

$$S = n\,x(0, n) = \frac{3n}{4}\,x(1, n-1).$$

Or il se trouve que $\frac{3n}{4}\,x(1, n-1)$ est toujours plus grand que S à partir de $n = 2$.

La loi, prise à la lettre, conduit donc ici à une absurdité; et *c'est là* la raison qui, me faisant forcément abandonner l'interprétation littérale de l'article 759, me fait abandonner, comme conséquence logique, l'interprétation littérale de l'article 758.

Je crois avoir donc prouvé, en résumé :

1° Que l'application qui est faite, dans la pratique, des articles 758 et 759 est bien conforme à l'esprit de la loi et aux idées de ses auteurs, bien que la rédaction desdits articles, prise à la lettre, ait une tout autre signification;

2° Que si toutefois on veut appliquer littéralement l'article 758 et se conformer strictement au sens très déterminé de la loi, il se pose un certain problème mathématique dont la véritable et unique solution est la formule de Cournot et de Catalan;

3° Que si l'on tente d'appliquer littéralement l'article 759, on se heurte à une impossibilité.

[X10]
THÉORIE ALGÉBRIQUE D'UN JEU DE SOCIÉTÉ;

LETTRE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE
A M. BRICARD.

MON CHER CAMARADE,

Seriez-vous disposé à faire, pour une fois, fléchir le caractère sérieux et élevé de votre excellent Recueil,

en faveur de l'esquisse algébrique d'un jeu de société? L'énoncé m'en a été indiqué sans aucune explication, et je n'ai pu en connaître l'auteur. J'ai cherché à dégager le principe de sa réussite, ainsi que la forme la plus simple dont soit susceptible son mécanisme.

1. Un membre d'une réunion se déclare en mesure de deviner la date d'une naissance : jour, mois, année, uniquement d'après l'énonciation du résultat d'un calcul qui sera effectué, en dehors de lui, par l'un des assistants, en fonction des éléments numériques connus de ce dernier, à savoir : le quantième du jour, le rang occupé par le mois sur le calendrier et l'âge.

Cette prétention de déduire d'une seule donnée trois inconnues pourra sembler, au premier abord, une hérésie algébrique. Cependant l'Arithmétique élémentaire nous en fournit immédiatement le moyen. Il suffit pour cela de faire ajouter ensemble les produits de ces divers nombres entiers par des puissances de 10 suffisamment différentes les unes des autres pour isoler à coup sûr les trois inconnues dans le résultat total.

Prenons comme exemple la date de la naissance du signataire de cette lettre : 28 juillet 1833. Les valeurs qu'il s'agit de découvrir seront : 28; 7; 33 : puisque l'on sait d'avance qu'il s'agit du XIXe siècle, ce qui permet de faire abstraction des 18 centaines du millésime, en réduisant celui-ci à ce que nous appellerons son *résidu*.

Je suppose (pour outrer à l'extrême la simplicité) que l'on dicte au calculateur la règle suivante : multiplier le jour par 1000, ajouter le mois, multiplier la somme par 1000, ajouter le résidu. Le résultat sera

$$(28.1000 + 7).1000 + 33 = 28\,007\,033,$$

et les trois inconnues s'y lisent immédiatement. Mais

l'artifice serait par trop grossier, et de suite percé à jour.

2. Il nous faut, au contraire, tout en conservant le principe, en masquer le plus possible l'application. Nous disposerons d'après cela, pour former cette fonction linéaire des trois inconnues : jour, mois, résidu, toute une alternance de multiplications et d'additions (ou soustractions); en excluant la division, opération trop complexe pour la circonstance. Le calculateur opérera au moyen de coefficients qui lui seront dictés par le devin, et des données que lui-même possède, à savoir : le jour, j; le mois, m; et l'âge, a.

En ce qui concerne ce dernier élément, nous conviendrons expressément qu'il s'accroît chaque année d'une unité, non pas à l'anniversaire comme dans l'usage habituel, mais au 1er janvier, en même temps que le millésime, suivant la loi du recrutement ou de l'admission aux Écoles.

J'énoncerai donc de la manière suivante la règle à suivre pour le calcul, en y affectant des indéterminées provisoires :

A un nombre A ajouter le produit du jour par B, multiplier la somme par C, ajouter le produit du mois par D, multiplier le résultat par E, ajouter le produit de l'âge par F, multiplier le tout par G, et enfin ajouter le nombre H.

La formule qui résume ces opérations est la suivante :

$$(1) \qquad \{[(A + Bj).C + Dm].E + Fa\}.G + H.$$

et elle se réduit à

$$(2) \qquad .BCEG.j + DEG.m + (FG.a + ACEG + H).$$

Nos trois inconnues n'ayant au plus que deux chiffres, cherchons à les cantonner respectivement dans les trois tranches, de deux figures chacune, qui composent un nombre de cinq ou de six chiffres.

3. Il faut, en premier lieu, multiplier j par 10000, pour le refouler dans la tranche de gauche. Nous poserons donc

$$(3) \qquad BCEG = 10000.$$

Nous repoussons de même m dans les centaines par la condition

$$(4) \qquad DEG = 100.$$

Enfin, la parenthèse de la fonction (2) devra reproduire le résidu. Cherchons l'expression de ce dernier.

Je désigne, à cet effet, par p le millésime de la *présente* année, dans laquelle se fait l'opération (1910 au moment où j'écris). Si nous en retranchons l'âge a, nous remontons par là jusqu'à l'an de la naissance. Son millésime est donc $p - a$. Représentons par $100s$ les centaines du siècle de cette naissance (ou d'un événement quelconque, aussi reculé qu'on voudra). Le résidu sera $(p - a) - 100s$.

Posons donc, comme dernière condition :

$$(5) \qquad FGa + ACEG + H = p - a - 100s.$$

4. Nous possédons ainsi trois relations auxquelles il nous faut satisfaire à l'aide de huit nombres entiers arbitraires. De là une très large indétermination, qui permettrait de donner à la formule du jeu une infinité de formes différentes.

Quel pourra être notre guide pour faire choix parmi elles de celle qui mérite d'être retenue définitivement.

comme la mieux adaptée aux circonstances? Une seule considération, mais étroitement suivie d'un bout à l'autre : la plus grande simplicité. On ne saurait en effet demander d'exécuter, dans les conditions supposées, que des calculs extrêmement simples.

Procédons à cette discussion.

5. En divisant membre à membre les égalités (3) et (4) on obtient

$$(6) \qquad \frac{BC}{D} = 100, \qquad BC = 100\,D.$$

Le produit BC est donc au moins égal à 100, et si nous laissons croître D, les coefficients B et C deviendront inutilement considérables. Réduisons-les d'après cela le plus possible en posant

$$(7) \qquad D = 1.$$

Il reste alors

$$(8) \qquad BC = 100 = 2^2 . 5^2.$$

Nous n'aurons par conséquent que cinq manières de représenter 100 par le produit de deux facteurs entiers, à savoir :

$$(9) \qquad 1.100, \qquad 2.50, \qquad 4.25, \qquad 5.20, \qquad 10.10.$$

Les deux modes extrêmes présentent, suivant une remarque précédente, le défaut de trop appeler l'attention sur les puissances de 10. Le troisième introduirait inutilement un multiplicateur de deux chiffres, inconvénient auquel échappent le deuxième et le quatrième. Comme il est d'ailleurs naturel d'employer, pour les opérations successives, des nombres progressivement croissants, nous remarquerons que la quatrième solu-

tion ferait commencer par 5, tandis que la seconde introduit plus simplement 2 pour le début. Adoptons dès lors

$$(10) \qquad B = 2, \qquad C = 50.$$

D'après la condition (7), l'égalité (4) devient

$$(11) \qquad EG = 100,$$

reproduisant la même forme que (8). Nous n'y pouvons donc de nouveau satisfaire que par l'un des cinq modes précédents (9). Mais afin de mieux éclairer notre choix, suspendons-le pour un instant, en continuant le calcul.

L'équation (5) devient, par la substitution des valeurs (10) et (11),

$$FG\,a + 5000\,A + H = p - a - 100\,s$$

et donne

$$(12) \qquad H = p - (FG + 1)\,a - 100\,s - 5000\,A.$$

Or les coefficients dictés par le devin au calculateur ne sauraient évidemment dépendre d'éléments qui lui restent inconnus. Il nous faut donc, de toute nécessité, faire disparaître a de l'expression de H, en posant

$$FG + 1 = 0, \qquad F = -\frac{1}{G}.$$

Nous nous trouverions ainsi conduits à une division (que nous avons voulu expressément exclure), si nous n'adoptons (11) conformément au premier des modes (9)

$$(13) \qquad G = 1, \qquad E = 100; \qquad F = -1,$$

en passant cette fois, puisqu'il n'est plus possible de

faire autrement, sur l'inconvénient qui nous l'avait fait écarter tout à l'heure. Il vient par conséquent (12)

$$(14) \qquad H = p - 100s - 5000A.$$

En ce qui concerne A, nous ne rencontrons aucune considération directrice autre que la simplicité. Nous prendrons donc

$$(15) \qquad A = 1.$$

ce qui donne finalement

$$(16) \qquad H = p - 100s - 5000.$$

6. J'ai été frappé de voir que la règle qui m'avait été communiquée, sans indication de provenance, reproduit exactement, à l'exception d'un seul, tous les choix auxquels nous venons d'être méthodiquement conduits. On y emploie, en effet, la valeur $A' = 4$, sans que je puisse apercevoir aucun motif déterminant pour ce choix, ainsi que le montrera la discussion du n° 9. Continuons donc de fixer cette constante comme ci-dessus (15), d'une manière encore plus simple.

La formule (1) devient dès lors, par la substitution des diverses valeurs (7), (10), (13), (15), (16)

$$(17) \qquad [(2j + 1).50 + m].100 - a + (p - 100s - 5000)$$

et s'énonce de la manière suivante :

Doubler le jour, ajouter 1, *multiplier par* 50, *ajouter le mois, multiplier par* 100, *retrancher l'âge, enfin* RETRANCHER *un nombre qu'indiquera le devin.*

Pour la détermination de ce dernier élément, deux cas pourront se présenter.

En premier lieu, si l'on recherche l'âge d'une personne présente à la réunion, il sera facile au devin de s'assurer d'un seul coup d'œil que celle-ci (ni centenaire, ni enfant trop jeune) est née certainement dans le XIXe siècle. Faisant donc $s = 18$ et $p = 1910$ dans l'équation (16), il se trouvera conduit à faire *retrancher* le nombre 4890, immuable durant toute cette année 1910, et décroissant ensuite d'une unité à chaque 1er janvier, puisque p augmente alors d'autant.

S'il s'agit au contraire de l'âge d'un inconnu, ou d'une date de pure fantaisie, le devin se verra obligé de demander au préalable dans quel siècle se place l'événement, en limitant là son art divinatoire. Connaissant dès lors s, il évaluera d'après la relation (16) le nombre qu'il devra faire retrancher; lequel deviendra ainsi variable avec chaque cas.

7. Il subsiste toutefois une lacune dans cette explication.

Nous avons bien reculé aux rangs voulus les inconnues j et m; mais il reste à s'assurer que chacune des parties ne débordera pas par la gauche dans la tranche voisine, en y troublant l'isolement voulu des inconnues.

C'est d'abord évident en ce qui concerne la parenthèse de l'expression (2), puisque nous l'avons expressément assujettie (5) à être égale au résidu, lequel est un nombre de deux chiffres, incapable d'influencer les centaines.

Assurons-nous de même que, dans la fonction (17) qui se réduit à

$$10\,000j + 100m - (p - a - 100s),$$

le premier terme ne saurait se voir adjoindre aucune dizaine de mille de la part du reste de l'expression.

Il nous faut à cet égard envisager la plus grande valeur que puisse atteindre cette partie. Or, le maximum de m est 12, pour le mois de décembre, et celui du résidu 99. Le total donne 1299, nombre inférieur à 10 000.

8. Si nous reprenons comme exemple la date envisagée ci-dessus (n° 1)

$$j = 28, \qquad m = 7, \qquad a = 77, \qquad s = 18, \qquad H = 4890,$$

les calculs se développeront de la manière suivante : en disposant en regard ceux de la formule qui m'avait été indiquée ($A' = 4$, d'où découle pour la présente année $p = 1910$: $H' = 19\,890$).

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{rlrl}
28.2 = & 56, & 28.2 = & 56, \\
56 + 1 = & 57, & 56 + 4 = & 60, \\
57.50 = & 2\,850, & 60.50 = & 3\,000, \\
2850 + 7 = & 2\,857, & 3000 - 7 = & 3\,007, \\
2857.100 = & 285\,700, & 3007.100 = & 300\,700, \\
285\,700 - 77 = & 285\,623, & 300\,700 - 77 = & 300\,623, \\
285\,623 - 4890 = & 280\,733, & 300\,623 - 19\,890 = & 280\,733.
\end{array}\right.$$

On obtient donc des deux manières le même résultat

$$(19)\qquad 28\ \ 07\ \ 33,$$

dans lequel les trois inconnues se trouvent en évidence.

9. Cette manière d'opérer a l'avantage de permettre une divination *instantanée* ; mais elle présente en revanche l'inconvénient de mettre encore, malgré les efforts précédents, les assistants sur la voie du secret.

Or, il est bien facile d'écarter définitivement ce défaut en dissimulant complètement le principe. Il

suffit pour cela de limiter le travail fastidieux demandé au calculateur aux six premières opérations, les seules dans lesquelles figurent des nombres inconnus du devin. C'est, à ce moment, ce dernier qui, sur le résultat dont il reçoit alors communication, et qui ne saurait fournir à l'assistance aucune lumière, effectuera secrètement la soustraction de sa constante H qu'il ne divulguera pas, en faisant apparaître, à ses propres yeux seulement, l'isolement des trois inconnues.

C'est ce qu'on observe en effet dans le sixième nombre 300623 de la seconde colonne (18), mais non pas sur celui 285623 de la première. Cette différence tient à ce que la valeur $A' = 4$, plus forte que $A = 1$, s'est trouvée suffisante à cet égard, par sa combinaison avec l'hypothèse $j = 28$. Toutefois ce nombre 4 ne possède en lui-même aucune vertu certaine pour tous les cas, et dès lors ne saurait constituer un choix définitif.

Si l'on veut être assuré d'*obscurcir* à la fois *les deux* chiffres de gauche du sixième nombre, il faut que cette tranche devienne au moins égale à $j + 11$. Nous devons donc poser à cet effet

$$[(2j + A).50 + m].100 - a = 10000(j + 11),$$

d'où l'on déduit

$$A \geqq 22 - \frac{m}{50} + \frac{a}{5000}.$$

Mais A est un nombre entier, m est moindre que 13, et a reste très inférieur à 5000. Cette condition donne donc comme valeur la plus simple

$$A'' = 22,$$

résultat évidemment inacceptable dans les circonstances données.

Il faut donc se résigner à courir le risque d'un *unique* chiffre révélateur à gauche, inconvénient qui devient à la vérité minime. Remarquons d'ailleurs que ce chiffre sera fréquemment zéro, et passera dans ce cas inaperçu. Si nous voulons du moins troubler à coup sûr le second, nous devons remplacer dans la formule précédente $j + 11$ par $j + 1$. Elle donne alors

$$A''' = 2.$$

nombre très convenable, qui pourra être adopté, concurremment avec $A = 1$, suivant les préférences individuelles. On pourra même les employer tous les deux successivement pour varier la formule du jeu, si l'on en réitère l'application. Il vient alors (14), pour l'année 1910 et le XIXe siècle,

$$H''' = 9890.$$

Si nous appliquons ce nouveau mode à l'exemple du n° 8, nous trouverons en effet comme sixième nombre 290623, lequel, par la soustraction de H''', reproduit pour la troisième fois la séparation des inconnues (19).

Quant au chiffre de droite du sixième nombre, il reste *inévitablement* révélateur, mais sans que cela présente plus d'importance que tout à l'heure. Ce défaut n'existe d'ailleurs que pour 1910. Il disparaîtra dans les neuf années suivantes, pour ne se reproduire qu'en 1920. Cela tient à ce que p est le seul des trois termes de l'expression (14) qui puisse influer sur le chiffre de droite du sixième nombre, de manière à le ramener à celui des unités du résidu.

10. Si l'on opère sur des époques reculées au delà de l'origine de l'ère chrétienne, s prendra des valeurs négatives dans l'expression (16) du nombre H à employer.

S'il s'agit, au contraire, d'une date *future*, c'est l'âge a qui deviendra négatif, et dont la soustraction, dans la sixième opération, se changera en une addition.

Recevez, mon cher Camarade, etc.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE,
de l'Institut.

CORRESPONDANCE.

M. **R. Bouvaist.** — *A propos de la question proposée* 2110. — Dans le numéro de décembre 1909, M. G. Pélissier déduit la solution de la question proposée 2110 de la proposition suivante dont il donne une démonstration analytique :

Si d'un point P *on mène trois normales à une parabole* Π, *l'orthocentre du triangle* T *formé par les tangentes à* Π *aux pieds des normales considérées est sur le diamètre de* Π *passant par* P.

Voici de cette proposition une démonstration géométrique : L'hyperbole d'Apollonius H d'un point P par rapport à une parabole Π est le lieu des points M tels que leurs polaires par rapport à Π soient perpendiculaires à PM. Il en résulte que la tangente à H en P est perpendiculaire à la polaire de P par rapport à Π, et par suite que cette polaire coupe H en deux points α et β tels que l'angle $\alpha P \beta$ est droit. Ceci posé, la polaire réciproque de H par rapport à Π est une parabole Π′ dont l'axe est perpendiculaire à celui de Π et qui est inscrite dans le triangle T. Les tangentes issues de P à Π′ sont les polaires des points α et β par rapport à Π, elles sont rectangulaires d'après ce qui a été dit plus haut; donc P est sur la directrice de Π′, qui contient l'orthocentre de T et qui est parallèle à l'axe de Π.

M. **G. Fontené.** — Dans le Mémoire que j'ai donné récem-

ment sur la théorie du tétraèdre (p. 555 du Volume précédent), le rôle des égalités n'est pas assez marqué :

L'égalité (7) est l'équation en k;

L'égalité (8) donne r en fonction de k;

Les égalités (9) et (10) peuvent remplacer (7) et (8);

L'égalité (11) ou (12) est l'équation en r; la condition de contact prend les formes successives (13), (15), (16), (17) ou (18), puis (19) ou (20) avec r, (21) avec k.

Pour résoudre les équations (7) et (8), on doit écrire

$$(7) \qquad P(P - 2M) - 2\alpha N = 0,$$

$$(8) \qquad (kP^2 - N^2) - rN(P - 2M) - 2\alpha krP = 0;$$

en éliminant $P - 2M$, à l'aide des multiplicateurs rN et P, on a

$$(kP^2 - N^2)(P - 2\alpha r) = 0;$$

l'hypothèse $kP^2 = N^2$ est inadmissible, et l'on doit prendre

$$P = 2\alpha r;$$

la relation (8), qui se réduit alors à trois termes, donne, en écartant l'hypothèse inadmissible $N = 0$, $P = 0$,

$$N - 2r(\alpha r - M) = 0.$$

Etc.

A la page 567, en haut, il fallait dire qu'on applique la condition de contact, qu'elle donne

$$k = a^2.$$

A la page 564, il faut supprimer la dernière ligne du n° 14. A la page 570, il faut lire

$$a = b, \qquad c = d,$$

et, plus loin,

$$a = b = -c = -d;$$

au lieu de dire qu'on a écarté l'hypothèse $a = b = c$, il fallait dire que cette hypothèse donne une pyramide triangulaire régulière, et la même observation s'applique à la page 571, ligne 15; quant à l'hypothèse

$$a = b = -c = -d,$$

elle donne un tétraèdre régulier avec r infini, ce qui ne constitue pas une solution du problème.

La note placée à la fin du Mémoire est à supprimer : la chose est dite dans l'énoncé.

Philbert du Plessis. — La solution donnée de la question 2113 [1] (1909, p. 574) fait appel à une vue de l'espace. Voici comment on peut démontrer la proposition sans sortir du plan :

Je raisonne sur la figure de la page 575, ainsi complétée : je mets la lettre O au point de rencontre des diagonales AC et BD, et je prolonge PQ jusqu'en son point de rencontre S avec AB.

Si l'on pose

$$\frac{PC}{PB} = p, \qquad \frac{QC}{QM} = q, \qquad \frac{RC}{RO} = r,$$

on trouve immédiatement que

$$\frac{SB}{SM} = \frac{2}{2-p} \qquad \text{et} \qquad \frac{RC}{RA} = \frac{r}{2-r}.$$

Cela posé, le triangle MBC coupé par la transversale QPS et le triangle MAC coupé par la transversale BQR donnent respectivement

$$pq\frac{2}{2-p} = 1 \qquad \text{et} \qquad q\frac{r}{2-r}2 = 1$$

ou

$$2pq = 2-p \qquad \text{et} \qquad 2qr = 2-r,$$

d'où résulte que

$$p = r.$$

Donc PR est parallèle à BO, c'est-à-dire perpendiculaire à AC. Il en résulte que le quadrilatère ABPR est inscriptible, donc que

$$\widehat{BAP} = \widehat{BRP} = \widehat{DBR}.$$

C. Q. F. D.

---

[1] Il y a une faute d'impression dans cette solution. Il faut lire (p. 575, ligne 6) : « le plan (B M C) » et non « le plan (B' M C') ».

M. **E.-N. Barisien.** — Après de longues recherches, je suis parvenu à l'expression suivante de l'aire commune à une ellipse et à sa développée (axes $2a$ et $2b$) :

$$A = \frac{3c^4}{4ab} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}}\right)$$
$$- 2ab \operatorname{arc\,sin}\left[\frac{a}{c}\left(\frac{a^2 - 2b^2}{2a^2 - b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$- \frac{3(a^4 + b^4 - 4a^2b^2)\sqrt{(a^2 - 2b^2)(2a^2 - b^2)}}{4(a^2 + b^2)^2},$$

qui est, je crois, inédite. La formule ne s'applique que si l'ellipse et sa développée se coupent aux points réels

$$x = \pm \frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad y = \pm \frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Alors $a > b\sqrt{2}$.

M. **Georges Delbouis.** — *Au sujet de la dérivation sous le signe* $\mathbf{S}$. L'intégrale multiple de

$$I = \mathbf{S}_E f(x, y, \ldots, \alpha)\, de,$$

α restant intérieur à un domaine Δ définit, moyennant certaines hypothèses, une fonction I de α qui admet une dérivée représentée par l'intégrale

$$(1) \qquad \mathbf{S}_E f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)\, de,$$

ceci en supposant que les domaines E et Δ ne dépendent pas l'un de l'autre.

Qu'arrive-t-il si, au contraire, le champ d'intégration E dépend de α?

Dans le cas des intégrales définies, on applique la règle de dérivation des fonctions composées. Mais si l'intégrale est multiple, la dérivée de $I(\alpha)$ se présente comme la limite de

l'expression

$$\frac{S_{E+\Delta E} f(x, y, \ldots, \alpha + \Delta\alpha)\, de - S_E f(x, y, \ldots, \alpha)\, de}{\Delta\alpha}$$

qui ne donne pas de résultat simple immédiat.

Or on peut, dans certains cas, se ramener au calcul d'une expression de la forme (1) :

1° Le domaine d'intégration est soit un cercle dont le centre et le rayon sont des fonctions de α, soit une ellipse dont le centre et les longueurs des axes sont des fonctions de α.

On fera, dans le premier cas, le changement de variable

$$x = x_0 - ku \cos\varphi, \qquad u(0, 1),$$
$$y = y_0 - ku \sin\varphi, \qquad \varphi(0, 2\pi),$$

et le nouveau domaine d'intégration est un rectangle qui ne dépend pas de α.

Dans le cas de l'ellipse, on poserait de même

$$x = x_0 - au \cos\varphi,$$
$$y = y_0 - bu \sin\varphi.$$

2° On poserait de même, dans le cas où le domaine d'intégration serait une sphère ou un ellipsoïde :

$$x = x_0 - ku \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = y_0 - ku \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = z_0 - ku \cos\theta,$$

ou

$$x = x_0 - au \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = y_0 - bu \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = z_0 - cu \cos\theta.$$

D'une manière générale on cherchera à exprimer les variables $x, y, \ldots$, en fonctions de nouvelles variables $u, v, \ldots$ et de fonctions de α de façon que le nouveau champ d'intégration obtenu ne dépende plus de la variable α.

[O'5]

SUR UN TRIÈDRE MOBILE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$, une surface S étant définie comme enveloppe du plan

$$(1)\qquad x\cos\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\sin\psi - z\sin\varphi = \varpi,$$

les coordonnées x, y, z du point de contact M de ce plan sont données par l'équation (1) et les équations

$$(2)\qquad -x\sin\varphi\cos\psi - y\sin\varphi\sin\psi - z\cos\varphi = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = p,$$

$$(3)\qquad -x\cos\varphi\sin\psi - y\cos\varphi\cos\psi = \frac{\partial\varpi}{\partial\psi} = q;$$

ces trois équations donnent

$$x = \varpi\cos\varphi\cos\psi - p\sin\varphi\cos\psi - q\frac{\sin\psi}{\cos\varphi},$$

$$y = \varpi\cos\varphi\sin\psi - p\sin\varphi\sin\psi - q\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},$$

$$(4)\qquad z = \varpi\sin\varphi + p\cos\varphi = \cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varpi}{\cos\varphi}\right).$$

En remarquant que les plans (1), (2), (3) sont deux à deux orthogonaux, le *calcul des coordonnées du point* M *met en évidence un trièdre trirectangle mobile en même temps que ce point qui en est le sommet; l'une des arêtes est la normale en* M *à la surface* S.

Déterminons la nature du réseau orthogonal découpé sur la surface S par les plans (2) et (3). Les cosinus directeurs des arêtes Mx_1, intersection de (2) et (3), My_1, intersection de (3) et (1), et Mz_1, intersection

de (1) et (2) sont donnés par le Tableau suivant :

	Ox.	Oy.	Oz.
Mx_1	$\cos\varphi\cos\psi$	$\cos\varphi\sin\psi$	$\sin\varphi$,
My_1	$-\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi$	$\cos\varphi$,
Mz_1	$-\sin\psi$	$\cos\psi$	0.

L'arête Mz_1 est donc parallèle au plan Oxy que nous supposerons horizontal. Par suite, les *plans* (2) *et* (3) *découpent sur la surface* S *le réseau orthogonal des lignes de niveau et de plus grande pente.*

2. Le résultat relatif à l'orthogonalité des plans (1), (2) et (3) est une généralisation d'un théorème bien connu de Géométrie plane concernant les enveloppes de droites. Il peut être étendu à un nombre quelconque de dimensions. Considérons, en effet, un espace à $n+1$ dimensions : soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ les coordonnées ponctuelles et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les angles qui fixent la direction d'un plan

$$\begin{aligned}
\Pi = {} & x_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_n \\
& + x_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-1} \sin\alpha_n \\
& + x_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-2} \sin\alpha_{n-1} \\
& + x_4 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_{n-3} \sin\alpha_{n-2} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha_n \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + x_{n+1} \sin\alpha_1 - \varpi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0;
\end{aligned}$$

le point de contact de ce plan avec son enveloppe est défini par les $n+1$ équations

$$\Pi = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_n} = 0,$$

qui représentent $n+1$ plans deux à deux orthogonaux.

Comme application de ce théorème général, considérons une sphère quelconque de l'espace à trois dimen-

sions; soit, selon les notations de M. Darboux,

$$S \equiv 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \frac{\delta}{R}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$
$$+ i\frac{\varepsilon}{R}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 0$$

son équation. Supposons que les quatre paramètres α_1, α_2, α_3, α_4, dont dépend la sphère, soient liés à α, β, γ, δ, ε par les relations

$$\alpha = \sin\alpha_1,$$
$$\beta = \cos\alpha_1 \sin\alpha_2,$$
$$\gamma = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3,$$
$$\delta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \sin\alpha_4,$$
$$\varepsilon = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\alpha_4;$$

de ce qu'on sait sur les rapports entre la théorie des systèmes de cinq sphères deux à deux orthogonales et celle des substitutions linéaires orthogonales à cinq variables, il résulte que les cinq sphères

$$S = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_4} = 0$$

forment un système de cinq sphères deux à deux orthogonales; on observera que parmi ces cinq sphères deux dégénèrent en des plans.

Ces cinq sphères peuvent donc être prises pour sphères fondamentales d'un système de coordonnées pentasphériques.

3. A chaque point de la surface S est associé un trièdre trirectangle; cherchons si, sur cette surface S, il existe une courbe C telle que le trièdre mobile associé à chacun de ses points soit le trièdre de Serret-Frenet de C. En excluant des cas de dégénérescences en courbes planes, on voit que C *est une hélice pour*

son cylindre projetant sur Oxy, une asymptotique de S et, par conséquent, une ligne de plus grande pente de S; d'après une remarque qui se trouve, en note, au bas de la page 175 du Tome I des *Leçons*, de M. Darboux, *cette courbe* C *aura pour image sphérique un parallèle de la sphère.*

Un premier exemple est celui de la surface minima d'Enneper, convenablement orientée : c'est là un exemple de surface S possédant un nombre fini de courbes C, pour une orientation donnée.

Pour que, sur S, il y ait une infinité de courbes C, il faut que les *lignes de plus grande pente soient des asymptotiques :* S doit donc être une intégrale de l'équation (en coordonnées ordinaires)

$$rp^2 - 2pqs - tq^2 = 0:$$

cette équation est réductible, par la transformation de Legendre, à celle, étudiée par M. Bianchi, dont dépendent les surfaces pour lesquelles les asymptotiques d'un système sont situées sur des cylindres de révolution coaxiaux; on vérifiera que les coordonnées de tout point de S s'expriment en fonction de deux paramètres ψ et u par les formules

$$x = e^u\left(-\cos\psi\frac{\partial V}{\partial u} - \sin\psi\frac{\partial V}{\partial\psi}\right),$$

$$y = e^u\left(-\sin\psi\frac{\partial V}{\partial u} + \cos\psi\frac{\partial V}{\partial\psi}\right),$$

$$z = V - \frac{\partial V}{\partial u},$$

dans lesquelles V est l'intégrale générale de l'*équation du mouvement de la chaleur*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2} = \frac{\partial V}{\partial u};$$

toutes les lignes de plus grande pente de S étant des

asymptotiques de S sont des hélices de leurs cylindres projetants sur Oxy et, par conséquent, sont des courbes C.

Lorsque la surface S dégénère en une courbe, à chacun de ses points est associée une infinité simple de trièdres mobiles; le trièdre de Serret-Frenet de la courbe est un de ces trièdres si la courbe est une hélice pour son cylindre projetant sur Oxy.

4. Lorsque le point M de contact de (1) avec S décrit une courbe sur S, les projections de son déplacement infinitésimal sur les axes mobiles sont respectivement

$$(5)\quad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dy_1 = D\,d\varphi + D'\,d\psi = \dfrac{dz}{\cos\varphi}, \\ dz_1 = \dfrac{D'\,d\varphi + D''\,d\psi}{\cos\varphi}, \end{cases}$$

en posant

$$(6)\quad \begin{cases} D = \varpi = r = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}, \\ D' = q\tang\varphi - s = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,\dfrac{\partial z}{\partial\psi}, \\ D'' = \varpi\cos^2\varphi - p\sin\varphi\cos\varphi - t; \end{cases}$$

r, s, t désignent les dérivées $\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi^2}$, $\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial\varphi\,\partial\psi}$, $\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial\psi^2}$; D, D', D'' sont les coefficients de la seconde forme fondamentale de Gauss, dans les notations de Bianchi.

De ces relations (5) et (6) résultent tout d'abord les expressions des coefficients de la première forme fondamentale

$$(7)\quad \begin{cases} E = D^2 + \dfrac{D'^2}{\cos^2\varphi}, \\ F = D'\left(D + \dfrac{D''}{\cos^2\varphi}\right), \\ G = D'^2 + \dfrac{D''^2}{\cos^2\varphi}, \end{cases}$$

d'où se déduit la relation

$$(8) \qquad H\cos\varphi = D'^2 - DD'' \qquad (H = \sqrt{EG - F^2}).$$

Il résulte également des mêmes expressions (5) que *l'équation différentielle des images sphériques des lignes de niveau est*

$$(9) \qquad D\,d\varphi + D'\,d\psi = 0,$$

et que l'équation des images sphériques des lignes de plus grande pente est

$$(10) \qquad D'\,d\varphi + D''\,d\psi = 0;$$

on observera, en effet, que φ et ψ sont les coordonnées géographiques de l'image sphérique de M dans la représentation de Gauss.

5. Cherchons la condition pour qu'une droite issue de M et liée au trièdre mobile engendre une congruence de normales.

Soit d une droite issue de M et dont les cosinus directeurs α, β, γ, par rapport aux axes mobiles, sont des fonctions données des coordonnées géographiques de M; soient, d'autre part, α_0, β_0, γ_0 les cosinus directeurs de d par rapport aux axes fixes. Il faut que l'expression

$$\alpha_0\,dx + \beta_0\,dy + \gamma_0\,dz$$

soit une différentielle exacte $-d\lambda$; en vertu des équations (5), il faut qu'il en soit de même de l'expression

$$-d\lambda = \beta(D\,d\varphi + D'\,d\psi) + \frac{\gamma}{\cos\varphi}(D'\,d\varphi + D''\,d\psi);$$

la condition à établir est donc

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\beta D + \frac{\gamma D'}{\cos\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\beta D' + \frac{\gamma D''}{\cos\varphi}\right).$$

Dans (11), α a disparu et cette relation est laissée invariante lorsqu'on multiplie β et γ par un même facteur constant : *c'est là le théorème de Malus;* α_i, β_i, γ_i étant, en effet, les cosinus directeurs du rayon incident en M sur la surface S supposée dirimante, les cosinus directeurs α_r, β_r, γ_r du rayon réfracté sont liés aux précédents par les égalités

$$\beta_i = n\beta_r, \qquad \gamma_i = n\gamma_r,$$

dans lesquelles n est l'indice de réfraction relatif des milieux optiques séparés par la surface dirimante.

Appliquons (11) au cas où la droite d est invariablement liée au trièdre mobile; β et γ sont des constantes et nous poserons

$$\gamma = \beta \operatorname{tang} V.$$

Remarquons que D, D′, D″ satisfont aux relations

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial \psi} - \dfrac{\partial D'}{\partial \varphi} = -D' \operatorname{tang}\varphi, \\[2ex] \dfrac{\partial D'}{\partial \psi} - \dfrac{\partial D''}{\partial \varphi} = \operatorname{tang}\varphi\,(D'' + D\cos^2\varphi); \end{cases}$$

la condition (11) prend la forme

$$(13)\qquad D' = \operatorname{tang} V \times D\cos\varphi.$$

Écartons, pour l'instant, les cas extrêmes $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$; l'équation (13) est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui peut être intégrée en la mettant sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \operatorname{tang} V \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi};$$

intégrant et utilisant l'équation (4), on obtient

$$\varpi = \Psi\cos\varphi$$
$$+ \cos\varphi \int \mathfrak{F}_1 \left[\psi \operatorname{tang} V - \log\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi};$$

en profitant de la présence d'une fonction arbitraire $\mathcal{F}_1$, on peut faire disparaître le signe de quadrature et prendre pour intégrale générale de (13)

$$(14) \qquad \varpi = \Psi \cos\varphi + \sin\varphi\, \mathcal{F}(\tau) - \mathcal{F}'(\tau),$$

où Ψ et $\mathcal{F}$ sont respectivement deux fonctions arbitraires de ψ et de la variable τ

$$\tau = \psi \operatorname{tang} V + \log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right];$$

$\mathcal{F}'$ est la dérivée de $\mathcal{F}$ par rapport à τ.

La condition (13) s'interprète aisément à l'aide de l'équation (9) des lignes de niveau :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite invariablement liée au trièdre mobile et issue de M *engendre une congruence de normales est que les lignes de niveau de* S *aient pour images sphériques une famille de loxodromies.*

Lorsqu'il existe une droite issue de M invariablement liée au trièdre mobile engendrant une congruence de normales, il est bien entendu qu'il existe une infinité de telles droites; nous retiendrons seulement qu'il en existe une d_1 située dans le plan tangent à S : il suffit d'appliquer le théorème de Malus et de donner à l'indice de réfraction la valeur qui correspond au cas intermédiaire entre la réfraction et la réflexion totale.

On connaît donc une solution du problème de Transon pour le complexe spécial attaché à une surface dont les lignes de niveau ont des loxodromies pour images sphériques.

On peut encore dire que ces mêmes surfaces (14) sont caractérisées par la propriété suivante, qui permet

d'ailleurs d'écrire immédiatement leur équation cartésienne

$$\operatorname{tang} V = \frac{pq(r-t)+(q^2-p^2)s}{q^2r-2pqs+tp^2}:$$

Sur une surface dont les lignes de niveau ont des loxodromies pour images sphériques, il existe une famille de géodésiques qui sont les trajectoires des lignes de niveau sous un angle constant déterminé. Ces géodésiques sont identiques aux méridiens de la surface (¹).

Passons à l'examen des cas limites $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Lorsque γ est nul, D' est nul et, par suite, aussi F en vertu de (7); les parallèles et les méridiens sont conjugués et orthogonaux : la surface S est alors telle que ses lignes de courbure sont constituées par ses lignes de niveau (les parallèles) et par ses lignes de plus grande pente (les méridiens); c'est donc la *surface moulure* la plus générale. D'où le théorème :

Si une droite, autre que la normale, issue de M, *située dans le plan* $z_1 = 0$ *et invariablement liée au trièdre mobile, engendre une congruence de normales, il en est de même de toutes les droites de ce plan issues de* M *et la surface* S *est une surface moulure quelconque*

$$\varpi = \Phi(\varphi) + \Psi(\varphi)\cos\varphi.$$

Lorsque β est nul, D est nul. Les lignes de niveau (les méridiens) sont des asymptotiques et la surface est une surface réglée à plan directeur horizontal. Par

---

(¹) Selon Minding [*Ueber einige Grundformeln der Geodäsie* (*Crelle*, 1850)] j'appelle *méridiens* les courbes $\psi = \text{const.}$, et *parallèles* les courbes $\varphi = \text{const.}$

suite, *si une droite, autre que la normale, issue de* M, *située dans le plan* $y_1 = 0$ *et invariablement liée au trièdre mobile, engendre une congruence de normales, il en est de même de toutes les droites de ce plan issues de* M *et la surface* S *est une surface réglée à plan directeur horizontal :*

$$\varpi = \Psi_1 \cos\varphi - \Psi_2 \sin\varphi. \tag{15}$$

6. La surface (14), la plus simple, est celle pour laquelle $\mathcal{F}(\tau)$ est une fonction linéaire de τ; son équation peut être réduite à

$$\varpi = \sin V . \psi \sin\varphi + \cos V \left[\sin\varphi \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]; \tag{16}$$

cette surface est la seule surface minima qui satisfasse à la condition (13); elle s'obtient en prenant les expressions

$$\frac{e^{-iV}}{2u^2}, \quad \frac{e^{iV}}{2v^2}$$

pour les fonctions qui figurent dans les équations d'Enneper. Lorsque V varie, ces surfaces (16) constituent une famille connue de surfaces minima associées, applicables les unes sur les autres (*Leçons* de M. Darboux, n° 200, *hélicoïdes de Scherk*); elles comprennent comme variétés limites

$$V = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi}{2},$$

le caténoïde

$$\varpi = \sin\varphi \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

seule surface minima qui soit une surface moulure, et l'hélicoïde gauche à plan directeur

$$\varpi = \psi \sin\varphi. \tag{17}$$

seule surface minima qui soit une surface réglée.

En observant que la représentation sphérique de Gauss est une représentation conforme pour toutes les surfaces minima, on a le théorème suivant :

Pour la surface minima (16), *les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure ont des loxodromies pour images sphériques.*

Sur la surface minima (16), *les parallèles, les méridiens, les lignes asymptotiques et les lignes de courbure sont des loxodromies.*

Les équations des images sphériques des principales lignes sont :

Lignes de niveau :

$$z = \sin V . \psi + \cos V \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.};$$

lignes de plus grande pente :

$$\cos V . \psi - \sin V \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.};$$

asymptotiques :

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{V}{2}\right) \cdot \psi - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.},$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{V}{2}\right) \cdot \psi + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.};$$

lignes de courbure :

$$\operatorname{tang} \frac{V}{2} \cdot \psi + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.},$$

$$\cot \frac{V}{2} \cdot \psi - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{const.}$$

Les méridiens, orthogonaux aux parallèles puisque la surface est minima, sont des courbes

dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; pour la surface (16), en effet, les formules générales donnant les coordonnées du point M deviennent

$$(18)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{\cos V \cos \psi}{\cos \varphi} - \sin V \sin \psi \operatorname{tang} \varphi, \\ y = -\dfrac{\cos V \sin \psi}{\cos \varphi} + \sin V \cos \psi \operatorname{tang} \varphi, \\ z = \sin V . \psi - \cos V \log \left[\left(\operatorname{tang} \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \right) \right]; \end{cases}$$

et, par suite, le long d'un méridien, on a

$$y\,dx - x\,dy = \sin V\,dz.$$

Ces méridiens, nous l'avons dit, sont des géodésiques particulières; la surface (16) étant une surface harmonique, on obtient pour équation des images sphériques des géodésiques (ψ_0 et k étant leurs paramètres)

$$\cos \varphi = \operatorname{sn} \frac{\psi - \psi_0}{k},$$

le module des fonctions elliptiques étant k; interprétant cette équation selon Liouville, on voit que ces géodésiques jouissent de la propriété caractéristique suivante : soit ω l'angle que fait une géodésique issue de M avec le méridien de ce point; le long de chaque géodésique on a

$$\frac{\sin \omega}{\sin \varphi} = \text{const.} = k.$$

Pour $k = 0$, les géodésiques se réduisent aux méridiens. En laissant de côté le cas de l'hélicoïde (17) pour lequel les méridiens sont des droites, les tangentes aux méridiens constituent une congruence de normales; on a

$$\lambda = -\operatorname{tang} \varphi,$$

et, des formules (18), il résulte que ces droites sont normales à la surface

$$x = -\cos V \cos\varphi \cos\psi, \qquad y = -\cos V \cos\varphi \sin\psi;$$
$$z = \sin V . \psi + \cos V \left\{ \log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] - \sin\varphi \right\};$$

celle-ci est un hélicoïde, conformément d'ailleurs au théorème de Lie et de M. Picard sur les surfaces dont les normales appartiennent au complexe linéaire; cet hélicoïde est engendré par le déplacement hélicoïdal d'une tractrice de base Oz. Pour $V = 0$, il dégénère en la surface pseudosphérique de révolution et, pour $V = \frac{\pi}{2}$, en un hélicoïde gauche à plan directeur.

7. Les formules (12) ne sont autres que deux formules de Mainardi et Codazzi. Elles sont absolument fondamentales, et nous allons en indiquer des applications. De ces relations (12) résultent les équations générales

$$D \cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}, \qquad D' \cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial \psi},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} - \sin\varphi \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos^2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{D''}{\cos\varphi}\right).$$

Comme premier exemple, considérons les surfaces, intégrales d'une équation du troisième ordre, pour lesquelles $\frac{D''}{\cos\varphi}$ ne dépend que de la longitude ψ. En posant

$$u = \log \operatorname{tang} \varphi,$$

l'équation à intégrer est l'*équation du mouvement de la chaleur*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = \frac{\partial z}{\partial u};$$

soit alors z une intégrale de cette dernière équation;

la formule (4) donne

$$\frac{\varpi}{\cos\varphi} = \Psi(\psi) + \int z \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Nous avons précédemment considéré les surfaces dont les lignes de plus grande pente sont des asymptotiques. Leur équation est $D'' = 0$, et nous sommes donc dans un cas particulier du cas précédent. On observera que les équations de Mainardi et Codazzi deviennent alors

$$\frac{\partial B}{\partial \psi} = \frac{\partial A}{\partial u}, \qquad \frac{\partial A}{\partial \psi} = B,$$

en posant

$$A = D' \cos\varphi, \qquad B = D \sin\varphi \cos^2\varphi;$$

ces équations simultanées sont précisément celles que M. Bourlet envisage dans sa Thèse : *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (p. 51) : l'élimination de B conduit à l'équation du mouvement de la chaleur.

On peut encore mettre l'équation

$$D'' \equiv \varpi \cos^2\varphi - p \sin\varphi \cos\varphi - t = 0$$

sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left(\frac{\varpi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varpi}{\sin\varphi}\right), \qquad u = \log \operatorname{tang}\varphi;$$

$\frac{\varpi}{\sin\varphi}$ est intégrale de l'équation du mouvement de la chaleur : c'est la fonction V des formules du n° 3.

8. Comme second exemple, je considérerai les surfaces dont les lignes de courbure ont des loxodromies pour images sphériques.

L'équation des images sphériques des lignes de cour-

bure étant

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi\, d\psi^2 - \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'}\, d\varphi\, d\psi = 0,$$

ces lignes de courbure auront pour images sphériques les loxodromies

$$d\varphi = \tan V \cos\varphi\, d\psi,$$
$$d\varphi = -\cot V \cos\varphi\, d\psi,$$

si z satisfait à une certaine équation du second ordre qui, en posant

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = d\tau, \qquad z = \frac{U}{\operatorname{ch}\tau},$$

prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} - U - 2\cot 2V \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial\psi};$$

il suffit alors d'effectuer la transformation

$$\tau = A\tau_1 + B\psi_1,$$
$$\psi = A'\tau_1 + B'\psi_1,$$

A, B, A′, B′ étant des constantes déterminées, pour se ramener à l'une ou l'autre des équations

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\psi_1^2} - U = 0,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau_1\,\partial\psi_1} - U = 0;$$

La première de ces équations est celle à laquelle M. H. Poincaré ramène l'*équation des télégraphistes* [1]; la seconde est la forme que donne

---

[1] *Sur la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, t. CXVII, p. 1027), et *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, p. 134.

M. Picard à cette même équation des télégraphistes [1].

En résumé, la *détermination des surfaces dont les images sphériques des deux systèmes de lignes de courbure sont des loxodromies est équivalente à l'intégration de l'équation des télégraphistes.* C'est là un théorème général qui comprend comme cas particulier celui que j'ai donné dans une Note antérieure [2].

9. Les deux exemples précédents suffisent pour mettre en évidence l'importance des relations (12).

Comme autres exemples, j'indiquerai celui des surfaces

$$D'' + D \sin^2\varphi \cos^2\varphi = 0,$$

dont les asymptotiques se projettent sur Oxy suivant un réseau orthogonal et celui des surfaces minima

$$D'' + D \cos^2\varphi = 0,$$

Dans chacun de ces cas, on se ramène à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2} = 0;$$

dans le premier cas, τ est égal à $\log(\operatorname{tang}\varphi)$; dans le second, à $\log\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$. On utilisera ensuite l'équation (4), et l'on écrira que l'intégrale trouvée, dépendant de trois fonctions arbitraires, satisfait à

---

(1) *Sur l'équation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 16).

(2) *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 22).

l'équation du second ordre. Je reviendrai, d'ailleurs, ultérieurement sur ces équations et je donnerai de nouveaux exemples d'applications des équations (12) : j'étudierai notamment l'équation analogue à celle du mouvement de la chaleur, dont dépendent les surfaces pour lesquelles les asymptotiques ont des loxodromies pour images sphériques.

10. Déterminons l'enveloppe d'un plan invariablement lié au trièdre mobile; soient u, v, w, h les coordonnées de ce plan: ξ, η, ζ les coordonnées de son point de contact, par rapport aux axes mobiles. Nous avons les formules linéaires

$$u\xi + v\eta + w\zeta + h = 0,$$

$$-u\eta - v(\xi + D) + \frac{wD'}{\cos\varphi} = 0,$$

$$-u\zeta\cos\varphi + v(\xi\sin\varphi + D') + w\left(\xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi + \frac{D'}{\cos\varphi}\right) = 0,$$

qui permettent de calculer ξ, η, ζ.

Considérons, en particulier, le cas des faces du trièdre mobile.

En général, le plan (3) n'a pas d'enveloppe autre que le point à l'infini sur Oz. *Pour que le plan* (3) *ait une enveloppe, il faut et il suffit que la surface* S *soit une surface moulure.* Le plan (3) enveloppe alors un cylindre parallèle à Oz. Le point de contact de (3) avec ce cylindre est sur My_1 : My_1 engendre une congruence dont les plans focaux sont (1) et (3) : *les arêtes* My_1 *engendrent alors une congruence de normales;* on retrouve ainsi un résultat du n° 5.

En ce qui concerne le plan (2), il a toujours une enveloppe. Cette enveloppe peut se réduire au point O;

la surface S est alors intégrale de l'équation $p = 0$: c'est donc la surface (Σ) du n° 10 de mon Mémoire *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 35). En général, les coordonnées du point de contact sont

$$\xi = -D, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = -\frac{D'}{\sin\varphi};$$

de ces formules résultent les théorèmes suivants :

Pour que le point de contact du plan (2) *avec son enveloppe soit sur la normale à* S, *il faut et il suffit que cette surface soit une surface moulure.*

Pour que le point de contact de (2) *soit dans le plan tangent à* S, *il faut et il suffit que cette surface soit une surface réglée quelconque à plan directeur horizontal.*

11. Aux n°s 5 et 10, nous avons rencontré les surfaces moulures $D' = 0$ et les surfaces $D = 0$, réglées, à plan directeur. La théorie des surfaces moulures en coordonnées tangentielles (plus ou moins différentes de celles dont je me sers) étant connue, je m'occuperai uniquement des surfaces $D = 0$ auxquelles je consacrerai la fin de ce Mémoire.

Établissons directement que l'*équation* $D = 0$ *représente les surfaces réglées, à plan directeur horizontal.* La trace de (1) sur le plan horizontal de M, plan dont la cote est fournie par (4), a pour projection horizontale la droite

$$x\cos\psi + y\sin\psi = \varpi\cos\varphi - p\sin\varphi;$$

le second membre ne doit dépendre que de la longi-

tude ψ; d'où la condition

$$\varpi + r \equiv D = 0.$$

L'intégrale est (15). Ψ_1 et Ψ_2 désignent deux fonctions arbitraires de la longitude ψ. Ψ_2 *est la cote de la génératrice*, Ψ_1 *est la plus courte distance de cette génératrice avec* Oz.

Le contour apparent sur Oxy ne dépend que de Ψ_1. Lorsque Ψ_1 est nul, la surface est un conoïde droit de direction Oz; voici des exemples :

Paraboloïde équilatère :

$$z = \frac{x}{y}, \qquad \varpi = \operatorname{tang}\psi \sin\varphi,$$

hélicoïde gauche :

$$z = \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y}, \qquad \varpi = \psi \sin\varphi,$$

cylindroïde de Cayley-Plücker :

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x - y^2}, \qquad \varpi = \cos^2\psi \sin\varphi, \qquad \ldots.$$

En prenant

$$\Psi_1 = a\cos\Psi, \qquad \Psi_2 = a\sin\Psi,$$

Ψ étant une fonction donnée de ψ, on obtient les surfaces

$$\varpi = a\cos(\Psi - \varphi),$$

réglées, à plan directeur, circonscrites à la sphère de centre O et de rayon a. Pour $\Psi = \psi$, la surface est le conoïde de Wallis. La courbe de contact $\Psi - \varphi = 0$ avec la sphère est ici la courbe sphérique lieu des points d'égales longitude et latitude, c'est-à-dire la fenêtre de Viviani (résultat connu).

12. Aux surfaces réglées à plan directeur horizontal, on peut appliquer le théorème de M. Picard sur les asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent au complexe linéaire; on obtient pour images sphériques des asymptotiques les courbes

$$2 \operatorname{tang} \varphi \sqrt{\Psi_2} + \int \frac{\Psi_1 - \Psi_1''}{\sqrt{\Psi_2'}} d\psi = \text{const.};$$

cette équation se met sous la forme

$$2\sqrt{\delta} \operatorname{tang} \varphi + \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\delta}} = 0,$$

en introduisant le paramètre de distribution δ

$$\delta = \frac{d\Psi_2}{d\psi} = \Psi_2',$$

et l'élément d'arc $d\sigma$ de la projection sur Oxy du contour apparent horizontal (ligne de striction).

La quadrature disparaît pour

$$\Psi_1 - \Psi_1'' = 0,$$

c'est-à-dire pour les conoïdes. Le fait que les asymptotiques des conoïdes sont connues est classique, et il résulte des recherches de MM. Appell et Picard que ces courbes sont identiques aux courbes dont les tangentes appartiennent aux complexes linéaires; nous obtenons ici une forme simple de l'équation de leurs images sphériques

$$\operatorname{tang}^2 \varphi \, \Psi_2' = \operatorname{tang}^2 \varphi \, \delta = \text{const.} = k.$$

On pourra appliquer les considérations qui précèdent aux surfaces $\Psi_1 = \text{const.}$ considérées par M. Buhl à la page 342 des *Nouvelles Annales* de 1909.

Je terminerai en donnant l'expression de la torsion

de l'asymptotique. Les relations générales

$$(8)\qquad H\cos\varphi = D'^2 - DD'',$$
$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{\cos\varphi}{H}$$

deviennent, pour une surface $D = 0$,

$$H = \frac{\delta^2}{\cos^3\varphi}, \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = -\left(\frac{\cos^2\varphi}{\delta}\right)^2;$$

d'où la torsion $\frac{1}{T}$ de l'asymptotique

$$T = \frac{\delta}{\cos^2\varphi};$$

le rapport du paramètre de distribution de la génératrice issue de M *au rayon de torsion de l'asymptotique passant par* M *est constant le long de tout parallèle d'une surface réglée à plan directeur horizontal.*

En particulier, pour les conoïdes droits, on a

$$T = \frac{k}{\sin^2\varphi};$$

cette dernière formule n'est pas distincte de celle que M. Appell et Sophus Lie ont donnée pour la torsion des courbes dont les tangentes appartiennent au complexe linéaire.

[L²21c]

SUR UN THÉORÈME DE M. R. BRICARD;

PAR M. H. LEBESGUE.

M. Bricard [1] a démontré le théorème suivant :

Si une droite D *varie en touchant constamment*

[1] *Nouvelles Annales*, mars 1909.

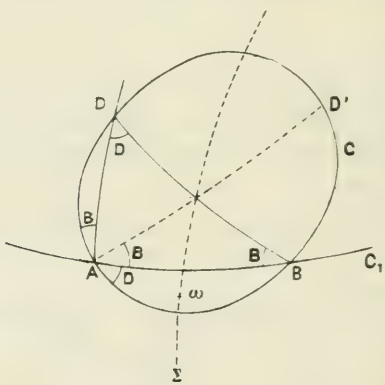
deux sphères S, S', *les plans tangents menés par* D *aux diverses quadriques* φ *circonscrites à ces deux sphères forment un faisceau de grandeur constante.*

Les plans bissecteurs des deux plans tangents issus de D *à une même quadrique* φ *passent par les centres de similitude de* S *et* S'.

L'angle de ces deux plans est celui des plans tangents à S *et* S' *en leurs points de contact avec une génératrice* δ *de* φ.

Cette troisième partie est due à M. M.-F. Egan[1]; elle se déduit facilement des deux premières en faisant tendre D vers δ. Pour justifier la première partie du théorème, il suffit évidemment de justifier les deux dernières; or elles résultent, on va le voir, d'un raisonnement très élémentaire.

Il me sera commode d'appeler *pseudo-triangle sphérique* la figure formée par trois arcs AB, BC, CA de cir-



conférences d'une même sphère, dont les prolongements passent par un même point I. Une inversion de centre I transformant la figure en un triangle rectiligne, on voit : que la somme des angles d'un pseudo-triangle est égale

(1) *Nouvelles Annales*, novembre 1909.

à deux droits; que la circonférence circonscrite à un pseudo-triangle coupe chaque côté sous un angle égal à l'angle opposé du pseudo-triangle. Ces propositions, dont la parenté avec le théorème de Lexell est évidente, résultent aussi de suite du fait que deux circonférences d'une même sphère se coupent sous le même angle en leurs deux points de rencontre.

Deux arcs de circonférences C et C_1, tracés sur une sphère et joignant deux points A, B, constituent ce que nous appellerons un *pseudo-fuseau* de sommet AB; ses bissectrices seront les grands cercles passant soit par A, soit par B, et divisant en deux parties égales les angles au sommet. Ces quatre bissectrices sont deux à deux symétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à AB; elles se coupent deux à deux en quatre points du grand cercle Σ contenu dans ce plan; on appelle ces points les *quatre centres de similitude sphérique des circonférences* C *et* C_1. Ce sont les points de rencontre de Σ avec les grands cercles tangents à la fois à C et C_1; on le voit, par exemple, en remarquant qu'une inversion ayant un des centres de similitude pour pôle, transforme les bissectrices qui y passent en des droites coupant sous le même angle les transformées de C et C_1 et passant par le transformé du centre de similitude diamétralement opposé.

Dans le cas d'un véritable fuseau, il n'y a plus que deux bissectrices.

Considérons deux circonférences C *et* C_1 *d'une sphère* O; *elles décomposent cette sphère en quatre pseudo-fuseaux de sommets* A *et* B.

Soit D *l'un des deux points de* C *tel que le point* D_1, *diamétralement opposé à* D, *soit sur* C_1. *Les deux grands cercles* DAD_1, DBD_1 *partagent la sphère* O *en quatre fuseaux.*

En chacun des quatre centres de similitude sphérique de C *et* C_1 *concourent deux bissectrices des pseudo-fuseaux* AB *et une bissectrice des fuseaux* DD_1. *Un pseudo-fuseau* AB *et le fuseau* DD_1 *contenant le même centre de similitude sont égaux.*

Σ étant le grand cercle contenant les pôles de C et C_1, soit AD′ le grand cercle symétrique de BD par rapport à Σ. Puisque la figure formée par les arcs AD, DB, AB des circonférences ADD_1, BDD_1, C_1 est un pseudo-triangle inscrit dans C, on a les égalités d'angles indiquées sur la figure. Il en résulte que les bissectrices passant par A des pseudo-fuseaux AB sont aussi les bissectrices des fuseaux déterminés par les grands cercles AD et AD′. Par suite, si ω est un centre de similitude de C et C_1, ω est également distant des grands cercles AD et AD′; d'autre part, il est évidemment également distant de AD′ et de BD, donc il est également distant des deux grands cercles AD, BD, et par suite est sur l'une des bissectrices des fuseaux DD_1. C'est la première partie du théorème; la seconde résulte des égalités d'angles déjà invoquées (¹).

Pour obtenir le théorème de M. Bricard, il suffit de prendre la droite D figurant dans l'énoncé de ce théo-

---

(¹) Ce théorème est une généralisation du théorème déjà utilisé sur l'égalité des angles d'un triangle rectiligne avec ceux sous lesquels la circonférence circonscrite au triangle coupe les côtés de ce triangle et du fait que les bissectrices du triangle passent par les milieux des arcs sous-tendus par les côtés. On peut aussi la considérer comme la généralisation des propriétés du contre-parallélogramme rectiligne. Pour cela, appelons *contre-parallélogramme sphérique* la figure formée par quatre grands cercles deux à deux symétriques par rapport à un grand cercle Σ. Les grands cercles AD, DB, BD′, D′A de la figure forment un contre-parallélogramme sphérique dont les huit sommets sont les points A, B, D, D′ et les

rème pour le rayon OD du théorème précédent. O sera le point de rencontre de D avec celle des quadriques φ que l'on considère. OA et OB seront les deux génératrices de φ passant par O. Le rayon de la sphère O sera quelconque. Les cônes de révolution de sommet O et de directrices C et C_1 sont circonscrits à S et S'; les droites joignant O aux centres de similitude de C et C_1 passent donc par les centres de similitude de S et S'. L'angle de C et C_1 est l'angle des deux cônes de révolution, donc celui des plans tangents à S et S' en leurs points de contact avec la génératrice OA de φ. L'angle des grands cercles DOA, DOB est celui des plans tangents à φ issus de D.

[13a]
SUR LES NOMBRES DE LA FORME $X^2 + XY + Y^2$;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Soit p un nombre premier, au moins égal à 3, et soit λ un des nombres de la suite complète

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1;$$

---

points diamétralement opposés. C et C_1 sont deux des circonférences circonscrites à ce contre-parallélogramme.

On voit qu'il existe quatre circonférences circonscrites au contre-parallélogramme (on ne s'occupe pas des grands cercles contenant quatre sommets). Si l'on convient de ne jamais associer deux circonférences diamétralement opposées, on voit que les quatre circonférences circonscrites associées deux à deux conduisent toujours aux mêmes quatre centres de similitude qui sont les pôles des quatre circonférences inscrites dans le contre-parallélogramme. Les circonférences circonscrites se coupent entre elles sous des angles égaux à ceux du contre-parallélogramme.

nous voulons étudier la congruence

$$(A) \qquad x^2 - \lambda x - \lambda^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Cette congruence admet au plus deux solutions; car, si elle admet la solution $x = a$, ce qui donne

$$a^2 - \lambda a + \lambda^2 \equiv 0,$$

on peut écrire

$$(x - a)[(x + a) - \lambda] \equiv 0.$$

Elle peut n'admettre qu'une solution (*voir* plus loin). Elle peut être impossible.

Une solution de cette congruence ne peut d'ailleurs être 0 ou λ, les deux premiers termes formant le produit $x(x - \lambda)$, de sorte qu'une solution appartient nécessairement à la *suite réduite*

$$(S) \qquad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p - 1 \qquad (\text{sans } \lambda).$$

2. Si a est un des nombres de cette suite réduite, on peut trouver dans la suite complète un nombre b et un seul, tel que l'on ait

$$(1) \qquad ab - \lambda a - \lambda^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

car on peut écrire

$$ab \equiv \lambda(a - \lambda) \pmod{p},$$

et le second membre n'est pas congru à zéro suivant le module p; le nombre b n'est d'ailleurs pas λ, de sorte qu'il fait partie de la suite réduite (S).

On aura, de même, en supprimant l'indication du module,

$$(2) \qquad bc - \lambda b - \lambda^2 \equiv 0,$$

le nombre c faisant partie de la suite (S), et je dis qu'on

a alors

$$(3) \qquad ca - \lambda c + \lambda^2 \equiv 0.$$

Éliminons en effet b entre les congruences (1) et (2); la seconde peut s'écrire

$$bc - \lambda(b - \lambda) \equiv 0;$$

en multipliant par a, et en remplaçant ab par $\lambda(a - \lambda)$, et $a(b - \lambda)$ par $-\lambda^2$, d'après la première, on a

$$\lambda c(a - \lambda) + \lambda^3 \equiv 0,$$

ou

$$ca - \lambda c + \lambda^2 \equiv 0.$$

3. *Si deux des nombres a, b, c, sont égaux, ces trois nombres sont égaux.* Ce fait, qui est intuitif sur les relations (1) (2) (3), se vérifie naturellement sur les relations (1) et (2), sans avoir recours à (3), soit qu'on suppose a ou c égal à b, soit qu'on suppose $a = c$. Le nombre a est alors une racine de la congruence (A).

Si la congruence (A) est impossible, les nombres de la suite (S) se répartissent donc en groupes de trois termes, et l'on a

$$p - 2 = 3k, \qquad p = 3k' - 1;$$

Si cette congruence est possible avec deux solutions, les nombres de la suite (S), sauf deux, se répartissent en groupes de trois termes, et l'on a

$$p - 2 = 3k + 2, \qquad p = 3k' + 1;$$

Si la congruence est possible avec une seule solution, on a

$$p - 2 = 3k + 1, \qquad p = 3.$$

Les réciproques sont, par suite, exactes : *La congruence*

$$x^2 - \lambda x + \lambda^2 \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \lambda \not\equiv 0.$$

est impossible si p est de la forme $3k' - 1$, possible avec deux solutions si p est de la forme $3k' + 1$, possible avec une solution si $p = 3$.

[On peut voir directement que le seul cas où la congruence ait une solution unique est le cas $p = 3$. Lorsque la congruence est possible, si elle admet la racine a, elle admet la racine $\lambda - a$ ou $p + \lambda - a$, qui ne se confond avec la première que si l'on a

$$2a - \lambda \equiv 0,$$

par suite, en remplaçant λ par $2a$ dans la congruence,

$$a^2 - 2a^2 - 4a^2 \equiv 0, \qquad 3a^2 \equiv 0, \qquad p = 3.$$

Pour $p = 3$, s'il existe un nombre a vérifiant la congruence

$$2a - \lambda \equiv 0 \qquad (\bmod 3),$$

on vient de voir que ce nombre est solution de la congruence (A), et solution unique; ce nombre existe, et c'est $3 - \lambda$; on peut avoir $\lambda = 1$, $a = 2$, ou $\lambda = 2$, $a = 1$.]

4. Les considérations précédentes ont été présentées par M. Bricard pour $\lambda = 1$, en vue d'établir d'une manière élémentaire le caractère quadratique du nombre -3 par rapport à un module premier (*N. A.*, 3e série, t. XVI, p. 546). On ramènerait le cas général à ce cas particulier en observant qu'on peut avoir

$$a = \lambda\alpha + \text{mult. } p,$$
$$b = \lambda\beta + \text{mult. } p,$$

ce qui transforme l'égalité (1) en celle-ci :

$$\alpha\beta - \alpha - 1 \equiv 0 \qquad (\bmod p).$$

Mais on vient de voir que le cas général se traite exactement comme le cas particulier.

5. Il résulte de ce qui précède que *tout nombre de la forme*

$$X^2 + XY + Y^2,$$

X et Y *étant premiers entre eux, a ses facteurs premiers de la forme* $3k' + 1$ (*ou encore* $6k'' + 1$), *à l'exception du facteur* 3 *qui existe dans l'hypothèse* $X - Y = \text{mult. } 3$, *dans cette hypothèse seulement, et qui existe alors avec l'exposant* 1. En effet, un tel nombre ne peut d'abord admettre le diviseur premier 2. S'il admet le diviseur premier p, au moins égal à 3, soit

$$X = \text{mult.}\, p + x, \qquad Y = \text{mult.}\, p - \lambda,$$

x et λ étant différents de zéro; on a alors

$$x^2 - \lambda x + \lambda^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p),$$

avec $\lambda \neq 0$, ce qui exige $p = 3k' + 1$, ou $p = 3$. Pour $p = 3$, on doit avoir

$$x = 3 - \lambda \qquad \text{ou} \qquad X = Y + 3k;$$

le nombre considéré est alors

$$3(Y^2 + 3kY + 3k^2),$$

et il contient une seule fois le facteur 3.

Le résultat obtenu se généralise (question 2137); mais je ne vois pas comment on pourrait généraliser les considérations qui y ont conduit ici.

[C21]

SUR LES INTÉGRALES CURVILIGNES;

PAR M. D. POMPEIU.

Considérons une intégrale curviligne

$$I = \int_{P_0}^{P} \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$$

prise le long d'une certaine courbe C depuis le point P_0 jusqu'au point P.

Pour que cette intégrale dépende uniquement du point de départ P_0 et du point d'arrivée P, et non du chemin suivi, il faut et il suffit que l'expression

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

soit une différentielle totale exacte : c'est-à-dire qu'on ait

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \psi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y},$$

la fonction $F(x, y, x_0, y_0)$ étant ainsi définie à une constante près.

1. Ordinairement on présente autrement ce théorème :

On admet que les fonctions φ et ψ possèdent des dérivées partielles du premier ordre et alors le théorème est démontré soit par la *méthode des variations* soit par la formule de Riemann qui transforme une intégrale curviligne en une intégrale double. On arrive ainsi à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

qui n'est qu'une conséquence des relations (1).

Mais le premier énoncé doit être préféré, non seulement pour la simplicité avec laquelle le théorème qui nous occupe se démontre (en considérant l'intégrale curviligne comme fonction de sa limite supérieure) mais surtout parce que cet énoncé est plus général en ce sens qu'il ne suppose aucunement l'existence des dérivées pour φ et ψ. En effet, l'intégrale I peut ne pas dépendre du contour sans que φ et ψ admettent des dérivées partielles.

En voici un exemple :

Prenons une fonction de Weierstrass, c'est-à-dire une fonction $f(t)$ n'admettant pas de dérivée et supposons que $f(t)$ soit définie dans un certain intervalle (t_1, t_2). Soit $F(t)$ la fonction primitive de $f(t)$,

$$F'(t) = f(t).$$

Posons

$$t = xy.$$

Lorsque le point t varie dans l'intervalle (t_1, t_2) le point (x, y) décrit une certaine région du plan et, dans cette région, je prends un certain domaine D.

En tout point (x, y) du domaine D je définis une fonction $U(x, y)$ par l'égalité

$$U(x, y) = F(xy) = F(t).$$

On voit facilement que la fonction U admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \psi(x, y).$$

Mais, on le voit aussi facilement, φ et ψ n'admettent pas des dérivées partielles.

Pourtant l'intégrale curviligne

$$\int_C \varphi\, dx + \psi\, dy$$

est nulle pour tout contour fermé C tracé dans D.

2. Jusqu'à présent nous avons supposé φ et ψ continues. Mais ces fonctions n'étant assujetties qu'à la condition d'être les dérivées premières d'une fonction $U(x, y)$, elles peuvent être *discontinues* sans que la propriété de l'intégrale curviligne cesse de subsister. On peut même former des exemples dans lesquels φ et ψ

présentent des discontinuités dans tout domaine aussi petit qu'on veut et la propriété de l'intégrale curviligne subsiste.

En définitive ni la dérivabilité ni même la continuité des fonctions φ et ψ ne sont des conditions *nécessaires* pour que l'intégrale curviligne I soit indépendante du contour.

3. Mais ce résultat doit être rapproché, comme d'ailleurs tous les résultats sur les intégrales curvilignes, des théorèmes analogues sur les intégrales des fonctions d'une variable complexe.

On sait que, pour une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine D, simplement connexe, l'intégrale

$$\int f(z)\,dz$$

ne dépend pas du contour : elle est nulle pour tout contour fermé C tracé dans D.

La réciproque est vraie.

Si, dans un domaine simplement connexe D, une fonction $f(z)$ est continue et toutes les intégrales

$$\int_C f(z)\,dz$$

(C étant un contour fermé quelconque, tracé dans D) sont nulles, cette fonction $f(z)$ est holomorphe dans D.

C'est un théorème qu'on démontre facilement en considérant l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz$$

comme une fonction de sa limite supérieure.

Ce théorème a été énoncé par Morera dans les *Ren-*

diconti del R. Instituto Lombardo, 2e série, t. XIX, 1886, p. 304-307. Ne sachant pas qu'il avait été donné par Morera [1] je l'ai démontré, à nouveau, dans ma Thèse : *Sur la continuité des fonctions d'une variable complexe* (*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, t. VII, 1905).

En séparant les parties réelles des parties imaginaires, le théorème de Morera peut s'exprimer de la façon suivante :

Si, dans un domaine D, *simplement connexe :*

1° *Les fonctions* $u(x, y)$ *et* $v(x, y)$ *sont continues ;*

2° *Les intégrales*

$$\int_C u\,dx - v\,dy, \qquad \int_C u\,dy + v\,dx,$$

nulles pour tout contour fermé C *tracé dans* D ; *les fonctions* u *et* v *admettent, dans* D, *des dérivées partielles continues liées par les relations*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

On serait tenté, d'après cet énoncé, de scinder le théorème de Morera en deux propositions distinctes dont l'ensemble soit précisément ce même théorème de Morera. B'est-à-dire :

Essayer de démontrer séparément que si u et v sont deux fonctions continues, dans un certain domaine D, simplement connexe, et si l'intégrale

$$\int_C u\,dy + v\,dx$$

---

(1) C'est par une obligeante communication de M. le Prof. E. Landau que j'ai eu les renseignements bibliographiques complets sur le théorème de Morera.

est nulle quel que soit le contour fermé C tracé dans D ; les fonctions admettent des dérivées premières liées par la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

et un théorème analogue, avec l'intégrale curviligne

$$\int_C u\,dx - v\,dy.$$

Mais l'exemple du n° 1 montre que ces propositions ne sont pas exactes séparément. Elles ne sont vraies que prises ensemble (théorème de Morera).

Ce fait analytique est, soit dit en passant, encore un argument en faveur du symbolisme introduit par l'emploi des nombres complexes.

4. La formule de Riemann

$$(2)\quad I = \frac{1}{2}\int_C M\,dy - N\,dx = \frac{1}{2}\int\int_C \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy$$

prend une signification simple dans le cas où

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad N = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Dans ce cas le nombre I peut être appelé la *variation* de la fonction $F(x, y)$ dans le domaine (C), car on a

$$I = \int\int_C \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy,$$

et cette formule est tout à fait analogue à la formule simple

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt,$$

dans laquelle Φ est la *fonction primitive* de $\varphi(t)$.

Dans le cas où la dérivé F''_{xy} de F n'est pas intégrable, étant par exemple partout discontinue et non bornée, l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{\partial F}{\partial y}\,dy - \frac{\partial F}{\partial x}\,dx$$

peut servir comme *définition* du symbole

$$\int\int_C \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy,$$

lorsqu'il ne rentre ni dans la définition de Riemann ni dans celle, plus générale, de M. Lebesgue.

[R5c]

NOTE SUR LES CHAMPS DE FORCES PLANS;

PAR M. CH. HALPHEN.

I. Par tout point d'une région, limitée ou non, d'un plan, où l'on a pris deux axes rectangulaires, faisons passer une droite, ligne d'action d'une force appliquée en ce point, dont le coefficient angulaire est fonction des coordonnées du point $f(x, y)$. On sait que la détermination des lignes de force revient à l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Cette équation peut se déduire très aisément de la notion d'enveloppe. Soit

$$Y - y = f(x, y)(X - x) \tag{2}$$

l'équation de la droite D passant au point $M(x, y)$.

Cette droite n'a pas d'enveloppe puisqu'elle dépend de deux paramètres, x et y. Mais on peut *associer* les droites telles que D de façon que chaque groupe de ces droites ait une enveloppe. Posons par exemple

$$y = \varphi(x),$$

φ étant une fonction arbitraire; l'équation (2) ne dépend plus alors que *d'un seul* paramètre, x, et la droite D a une enveloppe. On obtient l'abscisse X du point de contact en différentiant l'équation (2) par rapport au paramètre x

$$(3) \quad -\varphi'(x) = (X - x)[f'_x(x, \varphi) - f'_\varphi(x, \varphi)\varphi'_x] - f(x, \varphi).$$

Pour que cette enveloppe soit une ligne de force, il faut que son point de contact avec D soit précisément le point M où est appliquée la force, c'est-à-dire que $X = x$, l'équation (3) devient alors simplement

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi)$$

qui détermine la fonction φ; elle n'est autre que l'équation (1).

On peut procéder de la même façon pour les lignes de niveau, dont l'équation différentielle est

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

II. Si le coefficient angulaire de la force qui agit en un point $M(x, y)$ ne dépend que du rapport $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire si les forces agissant en des points en ligne droite avec l'origine sont parallèles, l'équation (1) devient homogène

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

et par conséquent, les lignes de force sont des courbes homothétiques par rapport à l'origine. Mais l'équation (4) des lignes de niveau devient aussi homogène

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

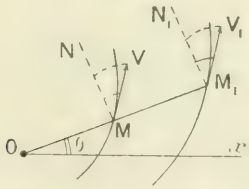
Donc on a ce théorème :

Les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes homothétiques par rapport à un point O *sont aussi homothétiques par rapport au même point.*

Il est facile de démontrer géométriquement ce théorème. Je rappelle que les tangentes en des points homologues de deux courbes homothétiques par rapport à un point O sont parallèles. *Réciproquement, deux courbes et un point* O *étant donnés, si les tangentes en* TOUS *les couples de points* M, M_1 : M', M'_1; ..., *pris sur les deux courbes en ligne droite avec* O, *sont parallèles, ces courbes sont homothétiques par rapport au point* O.

Cette réciproque est intuitive si l'on considère une courbe comme un polygone de côtés extrêmement petits ; mais une telle *démonstration* n'est guère rigou-

Fig. 1.



reuse. En voici une fort simple s'appuyant sur des résultats élémentaires de Cinématique. Soient (*fig.* 1)

M, M_1 deux points homologues; supposons que la droite OMM_1 tourne autour de O, chacun des points M, M_1 décrit alors une des courbes données. Posons

$$r = OM, \qquad kr = OM_1.$$

Les vitesses des points M, M_1 étant constamment parallèles, d'après l'hypothèse, MN et M_1N_1 étant perpendiculaires à OMM_1, dans le même sens, on devra avoir

$$\operatorname{tang}\widehat{NMV} = \operatorname{tang}\widehat{N_1M_1V_1}$$

ou

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{r\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{d(kr)}{dt}}{kr\frac{d\theta}{dt}}$$

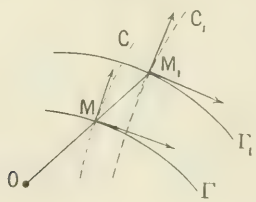
ou encore

$$k\frac{dr}{dt} = \frac{d(kr)}{dt},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si k est une constante. Les courbes décrites par M et M_1 sont donc homothétiques.

Cela posé, soit (C) une famille de courbes homothétiques par rapport à un point O: considérons deux quelconques de leurs trajectoires orthogonales, Γ, Γ_1 (*fig.* 2), et soit OMM_1 un rayon quelconque issu de O.

Fig. 2.



Par M et M_1 passent deux courbes C et C_1 de la famille donnée, et leurs tangentes en ces points sont parallèles;

il est de même des tangentes à Γ, Γ_1 qui sont perpendiculaires aux premières, ce qui démontre le théorème.

On voit, en outre, qu'il n'est pas nécessaire que Γ, Γ_1, ... soient les trajectoires orthogonales de C, C_1, ... pour que le théorème soit vrai ; il suffit que ces courbes coupent les courbes (C) sous un angle constant. On a donc ce théorème plus général :

Les courbes coupant sous un angle constant une famille de courbes homothétiques par rapport à un point O, *sont aussi homothétiques par rapport au même point.*

Si (5) est l'équation différentielle des courbes (C), l'équation différentielle des courbes les coupant sous un angle constant, dont la tangente est K, est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K + f\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - Kf\left(\frac{y}{x}\right)};$$

elle est bien, en effet, homogène.

Si, par exemple, le coefficient angulaire de la force agissant en un point $M(x, y)$ est inversement proportionnel au coefficient angulaire de la droite OM, on peut poser

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{m}\frac{x}{y}.$$

Si l'on suppose $m > 0$, on trouve pour lignes de force des ellipses homothétiques à l'ellipse

$$my^2 + x^2 = 1,$$

pour lignes de niveau des courbes homothétiques à la courbe $y = x^m$.

III. On n'envisage généralement que les champs de

forces constantes, où la force agissant en un point ne dépend que des coordonnées du point. Mais il peut arriver que cette force soit en outre fonction d'une autre variable, le *temps;* c'est ce qui se passe par exemple dans le champ magnétique tournant, sur le principe duquel est fondé le moteur asynchrone.

On peut *représenter* un tel *champ de forces variables.*

L'équation des lignes de force devient

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, t). \tag{6}$$

En donnant à t diverses valeurs constantes, et en intégrant chaque fois, on aura des équations des familles de lignes de force aux diverses époques; ces équations ne différant entre elles que par la valeur numérique de t. Il revient donc au même d'intégrer l'équation (6) en y considérant t comme une constante, quitte à donner ensuite, dans l'équation obtenue

$$F(x, y, t) = c,$$

diverses valeurs à t pour pouvoir construire les lignes de force aux diverses époques. Prenons un axe Ot perpendiculaire aux deux premiers Ox, Oy; l'équation

$$F(x, y, t) = c$$

représente alors une famille de surfaces. Si nous imaginons qu'on les coupe par un plan variable $t = \alpha$, se déplaçant d'un mouvement de translation à partir du plan xOy, les intersections traceront à chaque instant, sur ce plan, la figure des lignes de force du champ variable, en donnant ainsi une image de leur déformation continue. Il en est de même pour les lignes de niveau.

Dans le cas où ces surfaces seraient des espèces d'hélicoïdes, engendrés par deux familles de courbes orthogonales tracées dans le plan xOy, qui se déplacerait d'un mouvement hélicoïdal autour d'un axe perpendiculaire à lui-même, un observateur placé dans le plan variable $t = \alpha$ verra simplement les lignes de force et de niveau tourner, d'un mouvement uniforme si la translation du plan $t = \alpha$ l'est elle-même, autour d'un point fixe, sans se déformer; c'est là précisément l'image du champ tournant mentionné plus haut.

Mais il est clair qu'un tel mode de représentation est peu susceptible d'applications, puisque, pour étudier la forme même d'une surface, le procédé le plus pratique consiste précisément à en construire des sections planes, par exemple des courbes correspondant à diverses valeurs de t, ce qui est l'opération indiquée plus haut. Toutefois, il permet de se faire une idée assez nette de la continuité du phénomène.

CORRESPONDANCE.

M. **E. Turrière**. — Dans mon Mémoire *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques* (p. 24), j'ai résolu le problème de Transon pour le complexe de Painvin attaché à une quadrique à centre. J'en ai conclu que le problème des géodésiques pour les surfaces possédant un certain élément linéaire était résolu : ce cas de résolution du problème des géodésiques n'est pas nouveau et je dois ajouter que *l'élément linéaire considéré est réductible à la forme de Liouville*.

J'ai montré, en effet, comme application d'un théorème remarquable de M. Bricard, que le complexe de Painvin pouvait être engendré par une infinité de congruences de normales appartenant à des complexes quadratiques spéciaux.

Il résulte des équations que j'ai formées que, U et V désignant deux trinomes bicarrés, l'un en u, l'autre en v; l'équation

$$pq = \lambda(u, v)$$

des surfaces dont les normales appartiennent au complexe de Painvin admet une intégrale quadratique

$$Up^2 + 2\theta(u, v)pq + Vq^2 = \text{const.};$$

λ et θ sont deux fonctions déterminées des variables u et v. Si l'on se reporte donc aux *Leçons* de M. Darboux, ou aux Mémoires de M. Kœnigs sur les lignes géodésiques, on voit qu'il résulte du théorème de Massieu que les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = \lambda\, du\, dv$$

sont harmoniques : il suffit d'effectuer le changement de variables défini par les formules

$$u_1 = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad v_1 = \int \frac{dv}{\sqrt{V}},$$

pour réduire le ds^2 à la forme de Liouville. Bien entendu, le cas de réduction à la forme de Lie ne peut se présenter ici, puisque ni U ni V ne sont identiquement nuls.

Je développerai ultérieurement les applications à certains complexes des résultats importants qui ont été obtenus relativement aux intégrales quadratiques du problème des géodésiques, et je rectifierai les dernières lignes du paragraphe 3 de mon Mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

Savants du jour : Henri Poincaré. Biographie, Bibliographie analytique des écrits; par *Ernest Lebon*. Paris, Gauthier-Villars; 1909.

M. Ernest Lebon vient de trouver un excellent moyen d'utiliser les loisirs de la retraite; il s'est fait l'historiographe

de nos grands savants et nous promet de nous livrer une série d'opuscules sur leur vie et leur œuvre scientifique.

La première de ces brochures est dédiée au maître Henri Poincaré. Elle débute par des notes biographiques parmi lesquelles la plus importante est un extrait du charmant discours de réception prononcé par M. Frédéric Masson à l'Académie française.

L'immense Œuvre scientifique de l'éminent savant est présentée dans les sections suivantes, et chaque section comprend une analyse due à la plume de quelque autre savant; ce sont : pour l'Analyse et la Physique mathématique, le rapport de M. Gustave Rados sur le prix Bolyai; pour la Mécanique, l'adresse de Sir George Darwin; pour la Philosophie, l'article critique de M. Émile Faguet sur *Science et Méthode*.

Ainsi M. Ernest Lebon, limitant modestement son rôle à celui d'un habile compilateur, nous fait connaître les opinions émises sur le grand mathématicien-philosophe par ses pairs.

L'Ouvrage, orné d'un superbe portrait du Maître, est édité sous une forme typographique irréprochable et luxueuse, et l'on ne sait qui l'on doit le plus louer de l'historiographe scrupuleux et méthodique ou de l'éditeur soucieux de présenter au public des opuscules dignes des hommes de talent auxquels ils sont consacrés. C. B.

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

Épreuve théorique. — *Étant donnée une parabole de foyer* F *et dont l'équation par rapport à deux axes rectangulaires* OX, OY *est*

$$y^2 = 8ax;$$

1° *On considère un point mobile* M *qui, à l'origine du temps, se trouve en* O *et qui décrit la parabole avec une vitesse égale au produit de* FM *par une constante* ω; *calculer les coordonnées du mobile à un instant quelconque* t.

2° *On suppose que la droite* Δ *qui touche la parabole*

en M *roule sans glisser sur cette courbe; trouver la trajectoire du point* A *de la droite* Δ *qui se trouvait en* O *pour* $t = 0$.

3° *Si* P *est la projection de* F *sur* Δ, *montrer que la longueur* AP *croît proportionnellement à* t. *calculer la distance* FP *en fonction du temps.*

4° *Connaissant les expressions des longueurs* AP, PF, *en déduire quel serait le mouvement du foyer* F *si la parabole se déplaçait relativement à la droite* OY *supposée fixe.*

Épreuve pratique. — 1° *Étudier la nature de la série*

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \ldots;$$

calculer sa valeur à $\frac{1}{10^6}$ *près pour* $x = \frac{1}{10}$;

2° *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} - 10y = 20x + 18e^x - 3e^{-5x}.$$

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — *On considère, par rapport à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *une famille de cercles* (C), *ayant pour équation*

$$(x - t^2)^2 + \left(y - t + \frac{t^3}{3}\right)^2 - \left(t + \frac{t^3}{3}\right)^2 = 0,$$

où t *désigne un paramètre arbitraire.*

I. *Construire le lieu* (S) *du centre de ce cercle. Longueur d'un arc de la courbe* (S).

II. *Montrer que les deux points de contact de chaque cercle* (C) *avec l'enveloppe de la famille des cercles* (C) *sont confondus en un seul point,* M, *dont on demande d'exprimer les coordonnées en fonctions de* t.

Construire la courbe, (Σ), *lieu du point* M (*enveloppe des cercles*).

III. *Dire quelle est la développée de la courbe* (Σ), *et quelle est, en chaque point* M *de* (Σ), *la valeur du rayon de courbure* (*aucun calcul n'est nécessaire*).

IV. *On considère un point* P *de l'espace, mobile de telle manière que sa projection orthogonale sur le plan* xOy *tombe constamment sur la courbe* (S), *envisagée dans* I. *Déterminer en fonction de* t *la cote du point* P, *de telle sorte que la tangente à la courbe décrite par ce point* P *fasse avec* Oz, *troisième axe perpendiculaire aux deux premiers, un angle constant.*

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^x.$$

II. *Un point matériel* M, *mobile dans un plan, et rapporté à deux axes rectangulaires,* Ox, Oy, *de ce plan, est soumis à l'action d'une force centrale émanant du point* O *et proportionnelle à la distance* MO.

A l'origine des temps, on lance le mobile M, *à partir d'une position* A, *située sur* Ox *et d'abscisse* a, *avec une vitesse dont la grandeur* v_0 *est donnée, mais dont la direction est arbitraire.*

Est-il possible de choisir cette dernière direction de manière que le point matériel, parti de A, *aille rencontrer un point* B, (x_0, y_0), *donné d'avance dans le plan?*

Dans quelle région du plan doit être situé le point B *pour que le problème soit possible?*

(Juillet 1909.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — I. *On considère une courbe* C. *On désigne par* σ *l'angle que fait la tangente à la courbe en un point* M *avec l'axe* Ox *et par* R *le rayon de courbure au même point. Déterminer la courbe de façon qu'on ait la relation*

$$R = \sin 2\sigma.$$

Construire celle de ces courbes qui passe par l'origine des coordonnées et qui est tangente à Ox. *Calculer l'aire*

qu'elle limite; calculer à 0,01 *près les coordonnées des points où la courbure est minimum.*

II. *On lance suivant une ligne de pente d'un plan incliné et vers le bas avec une vitesse* v_0 *un point de masse m. Équation du mouvement en supposant :*

1° *Qu'il y a un frottement de coefficient* $f = \tang\varphi$ *sur le plan;*

2° *Que l'air oppose une résistance proportionnelle à la vitesse et directement opposée à celle-ci. On représentera cette résistance par* $\lambda m v$, λ *étant un coefficient positif et* v *la vitesse.*

A quelle condition le mobile s'arrêtera-t-il? Dans ce cas calculer la durée θ *du mouvement et la distance parcourue d.*

Développer en série la formule qui donne θ *suivant les puissances de* λ. *En négligeant les puissances de* λ *supérieures à la première, calculer la valeur simplifiée qui en résulte pour d.*

On se donne l'angle α *du plan incliné avec l'horizon.*

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation*

$$y'(x^2-1) - 2xy - \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^2} = 0.$$

Déterminer celle des courbes intégrales qui passe par le point $y = 0$, $x = 2$; *calculer à* 0,01 *près les abscisses des points de rencontre de cette courbe avec la droite* $y = 1$.

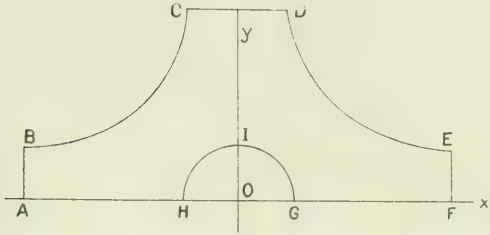
II. *Un prisme homogène a sa base limitée, comme l'indique la figure, par les segments de droites*

$$\begin{array}{lll}
\text{AB}, & x = -a, & 0 < y < \frac{a}{4}, \\
\text{CD}, & y = a, & -\frac{a}{4} < x < \frac{a}{4}, \\
\text{EF}, & x = a, & 0 < y < \frac{a}{4}, \\
\text{FG}, & y = 0, & \frac{a}{4} < x < a, \\
\text{HA}, & y = 0, & -a < x < -\frac{a}{4};
\end{array}$$

par les deux arcs d'hyperboles

$$\text{BC}, \qquad xy = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{DE}, \qquad xy = +\frac{a^2}{4},$$



et par le demi-cercle HIG

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{16}, \qquad y > 0.$$

Déterminer son centre de gravité.

(Juillet 1909.)

QUESTIONS.

2151. — Établir directement (pour $n \geq 1$) l'égalité

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots & . & . & \dots & . \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix} = 0$$

relative à la formule de sommation d'Euler Maclaurin.

(G. F.)

2152. — Soient M un point d'une ellipse E, C le centre de courbure relatif à M, P le point de Frégier relatif à M. Le milieu de la corde normale MN est le conjugué harmonique de C par rapport à M et P. (E.-N. Barisien.)

2153. — La normale en un point M d'une ellipse de centre O rencontre le grand axe en N. La parallèle à OM menée par N est normale à une ellipse fixe, dont deux des sommets coïncident avec les sommets du petit axe de l'ellipse donnée. (E.-N. Barisien.)

2154. — On donne un cercle C de centre O et de rayon R, et un point fixe A, tel que $OA = \frac{R}{\sqrt{2}}$. On considère toutes les ellipses qui ont le cercle C pour cercle orthoptique et qui passent par le point A.

Montrer que :

1° Ces ellipses enveloppent une ellipse;

2° Le lieu de leurs sommets se compose de deux cercles;

3° Le lieu de leurs foyers se compose de deux lemniscates de Bernoulli. (E.-N. Barisien.)

2155. — Les coniques bitangentes à une conique donnée C et ayant leurs foyers sur cette conique forment deux systèmes. L'enveloppe des coniques de l'un des systèmes se compose de C et de son cercle orthoptique. L'enveloppe des coniques de l'autre système se compose de C et de ses deux directrices. (L. Klug.)

[C2g]

EXTENSION AU CAS DES INTÉGRALES MULTIPLES D'UNE DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DUE A STIELTJES;

PAR M. FRÉCHET, à Poitiers.

M. Riesz a montré récemment (¹) comment on pouvait se servir d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes pour représenter les *fonctionnelles linéaires*. Je me propose de généraliser ici cette définition de l'intégrale de Stieltjes au cas des intégrales multiples. La généralisation obtenue pourrait servir de même à représenter ce que j'ai appelé (²) *les fonctionnelles d'ordre n*. Mais cette nouvelle définition de l'intégrale multiple, qui a son intérêt en elle-même, peut être exposée d'une manière tout élémentaire qui a sa place naturelle dans ces *Annales*. Ce que je dirai de l'intégrale d'ordre n s'appliquera, en particulier pour $n = 1$, à l'intégrale de Stieltjes, qu'il est donc inutile d'étudier à part.

1° *Fonctions à variation $n^{\text{ième}}$ bornée.* — Soit une fonction de n variables $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bien définie dans le domaine T,

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \qquad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \qquad \ldots, \qquad a_n \leqq x_n \leqq b_n.$$

Effectuons une division D de ce domaine en divisant chaque intervalle de variation, tel que (a_p, b_p) en intervalles partiels limités par les coordonnées

$$a_p = x_p^{(0)} < x_p^{1} < x_p^{2} \ldots < x_p^{(n_p)} = b_p.$$

Nous appellerons *variation $n^{\text{ième}}$* de la fonction u rela-

(¹) F. RIESZ, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires* (*Comptes rendus*, 29 novembre 1909).

(²) FRÉCHET, *Toute fonctionnelle continue est développable en série de fonctionnelles d'ordres entiers* (*Comptes rendus*, 18 janvier 1909).

tivement au mode de division D, la quantité

$$\sum_{i,j,\ldots,r,s} \left| \overset{n}{\underset{i,j,\ldots,r,s}{\Delta}} u \right|$$

où

$$\begin{aligned}
\overset{(n}{\underset{i,j,\ldots,r,s}{\Delta}} u = {} & u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j+1)}, \ldots, x_n^{(r+1)}, x_n^{(s+1)}) \\
& - [u(x_1^{(i}, x_2^{(j+1)}, \ldots, x_n^{(s+1)}) - u(x_1^{(i-1)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(s+1)}) + \ldots \\
& \qquad + u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j+1)}, \ldots, x_n^{(r+1)}, x_n^{(s)})] \\
& - [u(x_1^{(i}, x_2^{(j)}, x_3^{(k+1)}), \ldots, x_n^{(s+1)}) + \ldots \\
& \quad + u(x_1^{(i-1)}, x_2^{(j+1)}, \ldots, x_{n-2}^{(q+1)}, x_{n-1}^{(r)}, x_n^{(s)})] \quad \ldots \\
& + (-1)^{n-1}[u(x_1^{(i+1)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(s)}) + \ldots \\
& \qquad + u(x_1^{(i}, x_2^{(j}, \ldots, x_n^{(r-1)}, x_n^{(s+1)})] \\
& - (-1)^n u(x_1^{(i}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(s)}).
\end{aligned}$$

Nous dirons que la fonction u est *à variation $n^{\text{ième}}$ bornée* dans T si, quelle que soit la division D, la variation $n^{\text{ième}}$ correspondante reste inférieure à un nombre fixe. Cette variation $n^{\text{ième}}$ aura dans ce cas une borne supérieure V que nous appellerons la *variation $n^{\text{ième}}$ totale* de u dans T.

2° *Exemples de fonctions à variation $n^{\text{ième}}$ bornée.* — I. Si la dérivée $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ existe et est continue dans T, la fonction u est à variation $n^{\text{ième}}$ bornée. En effet, il est facile de voir qu'en appliquant la formule de Taylor un nombre suffisant de fois, on a

$$\begin{aligned}
\overset{n}{\underset{i,j,\ldots,r,s}{\Delta}} u = {} & \frac{\partial^n u(\xi_1^{(i}, \ldots, \xi_n^{(s)})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \\
& \times (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i}) (x_2^{(j+1)} - x_2^{(j)}) \ldots (x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)})
\end{aligned}$$

avec

$$x_1^{(i} \leq \xi_1^{(i} \leq x_1^{(i+1)}, \qquad \ldots, \qquad x_n^{(s} \leq \xi_n^{(s} \leq x_n^{(s+1)};$$

c'est, par exemple, dans le cas de $n = 2$, l'égalité au moyen de laquelle on démontre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Si donc on appelle Q le maximum de $\left(\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\right)$ dans T, on a

$$\sum_{i,\ldots,s} \left| \overset{(n)}{\underset{i,j,\ldots,r,s}{\Delta}} \right| \leq Q \sum_{i,\ldots,s} (x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}) \ldots (x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)})$$
$$= Q(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Le dernier membre donne en outre une limite supérieure de la variation $n^{\text{ième}}$ totale V.

II. D'après les définitions ordinaires, pour définir $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$, il faut d'abord admettre l'existence des dérivées d'ordre inférieur. Il est pourtant facile de former une fonction non dérivable à variation $n^{\text{ième}}$ bornée. Il suffit de prendre la fonction

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n).$$

On a

$$\overset{(n)}{\underset{i,j,\ldots,s}{\Delta}} u \equiv 0$$

quelles que soient les fonctions u_1, u_2, ..., quand même elles seraient extrêmement discontinues. On voit même que la variation totale d'une telle fonction est nulle.

III. Sans que la fonction u soit nécessairement dérivable, il peut arriver qu'elle vérifie une condition analogue à celle qui est connue sous le nom de *condition de Lipschitz* pour les fonctions d'une variable, à savoir

$$\overset{(n}{\underset{i,j,\ldots,s}{\Delta}} u \quad Q\,|\,x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\,|\ldots|\,x_n^{(s+1)} - x_n^{(s)}|,$$

où Q est un nombre fixe et où les x sont quelconques dans leurs intervalles de variation respectifs. Alors,

comme dans I, la fonction u sera à variation $n^{\text{ième}}$ bornée.

IV. Le produit $u \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \cdot g(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ où f est à variation $p^{\text{ième}}$ bornée et g à variation $(n-p)^{\text{ième}}$ bornée est à variation $n^{\text{ième}}$ bornée et la variation $n^{\text{ième}}$ totale de u, est au plus égale au produit de la variation $p^{\text{ième}}$ totale de f par la variation $(n-p)^{\text{ième}}$ totale de g. Car

$$\sum_{i,\ldots,n} \left| \overset{(n)}{\Delta}_{i,\ldots,l,m,\ldots,s} u \right| = \sum_{i,\ldots,n} \left| \overset{p}{\Delta}_{i,\ldots,l} f \right| \left| \overset{n-p}{\Delta}_{m,\ldots,s} g \right|$$
$$= \left(\sum_{i,\ldots,l} \left| \overset{(p)}{\Delta}_{i,\ldots,l} f \right| \right) \left(\sum_{m,\ldots,s} \left| \overset{n-p}{\Delta}_{m,\ldots,s} g \right| \right).$$

V. La somme ou la différence de deux fonctions à variations $n^{\text{ièmes}}$ bornées est aussi à variation $n^{\text{ième}}$ bornée et sa variation $n^{\text{ième}}$ totale est au plus égale à la somme de leurs variations $n^{\text{ième}}$ totales. Car

$$\sum \left| \overset{n}{\Delta} (u - v) \right| \leq \sum \left| \overset{(n)}{\Delta} u \right| - \sum \left| \overset{n}{\Delta} v \right|.$$

VI. Si l'on ajoute à une fonction à variation $n^{\text{ième}}$ bornée, u, une fonction de moins de n variables, v, la somme est à variation $n^{\text{ième}}$ bornée et sa variation $n^{\text{ième}}$ totale est exactement égale (et non au plus égale, comme dans § V) à la variation $n^{\text{ième}}$ totale de u. Car $\Delta^{(n)} v \equiv 0$.

3° *Propriété des fonctions à variation $n^{\text{ième}}$ bornée.* — Si une fonction est à variation $n^{\text{ième}}$ bornée, sa valeur n'est pas nécessairement bornée comme on le voit pour la fonction $u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{x_1 - a_1}$ pour $x_1 > a_1$, $= 0$ pour $x_1 = a_1$.

Elle n'est même pas nécessairement à variation $p^{\text{ième}}$ bornée par rapport à p de ses variables, comme le montre pour $p = 1$ l'exemple II. (Une fonction à variation première bornée est une fonction à variation bornée dans la terminologie de M. Jordan, dont la nôtre n'est qu'une extension au cas de plusieurs variables.) Mais on peut tourner ainsi la difficulté. Bornons-nous, pour simplifier, au cas de deux variables.

Étant donnée une fonction à variation seconde bornée $u(x, y)$, on peut, en lui ajoutant une somme de fonctions d'*une* variable, la transformer en une fonction $v(x, y)$ ayant même variation seconde totale, et à variation (première) bornée par rapport à chacune de ses variables.

Soit en effet $a \leqq x \leqq b$, $a' \leqq y \leqq b'$ le domaine T. Il suffit de poser

$$v(x, y) = u(x, y) - u(b, y) - u(x, b') + u(b, b')$$

et de voir que $v(x, y)$ est par exemple à variation bornée par rapport à y. Pour cela écrivons la variation seconde de v obtenue en divisant T par les abscisses, a, x, b, et les ordonnées $y_0, \ldots, y_n$

$$\sum \left| \overset{2}{\Delta} v \right| = \sum_i |v(b, y_{i+1}) - v(b, y_i) - v(x, y_{i+1}) + v(x, y_i)|$$
$$+ \sum_i |v(x, y_{i+1}) - v(x, y_i) - v(a, y_{i+1}) + v(a, y_i)|.$$

On a

$$\sum \left| \overset{2}{\Delta} v \right| \leqq V$$

fixe indépendant de x et

$$v(b, y) = 0.$$

Donc, *a fortiori*,

$$\sum_i |v(x, y_{i+1}) - v(x, y_i)| \quad V.$$

4° *Calcul de la variation totale.* — Montrons d'abord que si v, v' sont les $n^{\text{ièmes}}$ variations qui correspondent à deux divisions D, D′ dont l'une D′ comprend tous les traits de division de D et en outre d'autres, on a $v' \geqq v$. Il suffit de le démontrer quand D′ comprend tous les traits de division de D et en outre seulement une division marquée par exemple par l'introduction pour la variation de x, de x'_1 entre $x_1^{(i)}$ et $x_1^{(i+1)}$. Alors v' est une somme de trois parties, l'une qui contient $x_1^{(i)}$ sans $x_1^{(i+1)}$ *ni* x'_1, l'autre $x_1^{(i+1)}$ sans $x_1^{(i)}$ *ni* x'_1 la dernière qui est de la forme

$$|S(x'_1) - Sx_1^{i}| + |S(x_1^{i+1})| - S(x'_1)|.$$

Dans v se retrouvent les deux premières parties et la dernière se réduit à $|S(x_1^{i+1}) - S(x_1^{(i)})|$. Comme la valeur absolue d'une somme est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses parties, on a bien $v \leqq v'$.

Ceci étant, remarquons que V, la variation $n^{\text{ième}}$ totale, étant la borne supérieure des quantités v quand D est quelconque, il y a pour toute valeur de p une division D_p telle que la variation $n^{\text{ième}}$ correspondante soit comprise entre V et $V - \frac{1}{p}$. Ajoutons à D_p, s'il est nécessaire, d'autres traits de division, de façon que dans la division D'_p obtenue, la dimension maximum des intervalles soit $< \frac{1}{p}$.

La variation $n^{\text{ième}}$ correspondante, v'_p étant au moins égale à celle qui correspond à D_p, sera $\geqq V - \frac{1}{p}$ et bien entendu restera $\leqq V$ la borne supérieure. Alors on voit

que V'_p tend vers V quand p croît indéfiniment. Donc il y a une suite de divisions D'_p dont la dimension maximum des intervalles partiels tend vers zéro et dont les variations n^{iemes} correspondantes tendent vers V. Le même raisonnement prouve que si u n'était pas à variation $n^{\text{ième}}$ bornée, on pourrait former une suite de divisions D'_p pour lesquelles v'_p croît indéfiniment.

DÉFINITION DE L'INTÉGRALE $\int_T f\, d_n u$.

Soient maintenant $f(x_1, \ldots, x_n)$, $u(x_1, \ldots, x_n)$ deux fonctions bien définies dans le domaine T. Considérons la somme

$$s = \sum_{i,j,\ldots,s} f(\xi_1^i, \xi_2^j, \ldots, \xi_n^s) \left[\underset{i,j,\ldots,s}{\overset{(r)}{\Delta}} u(x_1^i, \ldots, x_n^s) \right]$$

où $\xi_1^i, \ldots, \xi_n^{(s)}$ sont des nombres respectivement compris entre $x_1^{(i)}$ et $x_1^{(i+1)}, \ldots, x_n^{(s)}$ et $x_n^{(s+1)}$. Si, quel que soit le choix des ξ et quelle que soit la suite des divisions D adoptée, la quantité s tend vers une limite bien déterminée quand la dimension maximum ε des intervalles partiels de D tend vers zéro, nous désignerons cette limite par la notation

$$\int_T f\, d_n u \quad \text{ou} \quad \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, d_{x_1} \ldots d_{x_n} u(x_1, \ldots, x_n).$$

Nous allons voir que c'est ce qui arrive si u étant une fonction à variation $n^{\text{ième}}$ bornée, on prend pour f une fonction continue quelconque dans T. En effet, soit V la variation n^{ieme} totale de u, μ le maximum de $|f|$ dans T. On a d'abord $|s| < \mu V$. Si donc on prend une suite de divisions de T : $D'_1, D'_2, \ldots$, dont les di-

mensions partielles tendent vers zéro, les sommes s correspondantes : $s'_1, s'_2, \ldots$ restent bornées. Soit σ leur plus grande limite. Alors on pourra extraire de D'_1, $D'_2, \ldots$, une suite $D_1, D_2, \ldots$, telles que les sommes $s_1, s_2, \ldots$ correspondantes tendent vers σ. Montrons maintenant que si l'on choisit une autre suite de divisions $\delta_1, \delta_2, \ldots$, dont la plus grande des dimensions partielles tend vers zéro, les sommes correspondantes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, tendent aussi vers σ.

En effet, supposons que pour $m > p$, les divisions de D_m et δ_m aient des dimensions assez petites pour que dans chacune d'elles l'oscillation de la fonction continue f soit inférieure à un nombre donné ω. Combinons maintenant toutes les divisions de D_m, $\delta_{m'}$ en un système de divisions $C_{m,m'}$. Alors chaque division de D_m se trouve partagée en un certain nombre de divisions de $C_{m,m'}$ et son $\Delta^{(n)} u$ sera la somme des $\Delta_u^{(n)}$ relatifs à ces divisions de $C_{m,m'}$. De même pour $\delta_{m'}$. De sorte qu'on aura

$$s_m - \sigma_{m'} = \sum [f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - f(\eta_1, \ldots, \eta_n)] \overset{(n)}{\Delta} u,$$

où $\Delta^{(n)} u$ est relatif à l'une quelconque α des divisions de $C_{m,m'}$, où $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un point de la division de D_m qui contient α et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un point de la division de $\delta_{m'}$ qui contient α. Si maintenant $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ est un point de α, on a par hypothèse

$$|f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < \omega,$$
$$|f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - f(\eta_1, \ldots, \eta_n)| < \omega;$$

d'où

$$|s_m - \sigma_{m'}| < 2\omega V \qquad \text{pour} \qquad m \text{ et } m' > p.$$

Si m' restant fixe, m croît indéfiniment, on aura enfin

$$\sigma - \sigma_{m'}| < 2\omega V \qquad \text{pour} \qquad m' > p_1.$$

6° *Simplification du calcul de l'intégrale.* — I. Dans le cas où u a une dérivée $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ bien déterminée et continue, la définition que nous avons introduite perd tout son intérêt, car elle se ramène à une définition plus simple connue. On a en effet

$$\overset{(n)}{\underset{(\ldots,s)}{\Delta}} u = \frac{\partial^n u(\xi_1^i, \ldots, \xi_n^s)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(x_1^{i+1} - x_1^i) \ldots (x_n^{s+1} - x_n^s).$$

Alors $\int_T f\, d_n u$ est la limite de

$$\sum f(\xi_1^i, \ldots, \xi_n^s) \frac{\partial^n u(\xi_1^i, \ldots, \xi_n^s)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(x_1^{i+1} - x_1^i) \ldots (x_n^{s+1} - x_n^s);$$

donc

$$\int_T f\, d_n u = \int_T \left(f \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \right) dx_1 \ldots dx_n.$$

II. Dans le cas précédent, l'intégrale peut s'écrire

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left[\ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(dx_{n-1} \int_{a_1}^{b_1} f \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} dx_n \right) \ldots \right].$$

Si en particulier f est de la forme

$$f = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n),$$

on a

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)\, d \ldots du(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1) \left[dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2) \left[dx_2 \ldots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \right.\right. \\
&\qquad \times \left[dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n) \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} dx_n \right] \ldots \Big| \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1)\, d_{x_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2)\, d_{x_2} \int \ldots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \\
&\quad \times d_{x_{n-1}} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n)\, d_{x_n} u(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

où le symbole $d_{x_i} \psi(x_1, \ldots, x_n)$ indique que dans $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ on ne considère que x_i comme variable. Cette formule étant démontrée lorsque u a une dérivée $\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ continue, cherchons à la démontrer pour le cas général.

III. Soit donc $u(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction à variation $n^{\text{ième}}$ bornée dans T et $\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)$ des fonctions respectivement continues dans T. Peut-on encore écrire

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)\, d_{x_1} \ldots d_{x_n} u(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1)\, d_{x_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x_2)\, d_{x_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x_n)\, d_{x_n} u(x_1, \ldots, x_n).$$

Il est d'abord nécessaire que cette expression ait un sens. Or, par exemple, u, qui est à variation $n^{\text{ième}}$ bornée, n'est pas toujours à variation première bornée par rapport à x_1, de sorte qu'il n'est pas sûr que l'on puisse déjà donner un sens à la première intégrale à effectuer

$$\int_{a_n}^{b_n} \varphi(x_n)\, d_{x_n} u.$$

On peut cependant se débarrasser de cette difficulté. Mais, pour ne pas compliquer les raisonnements, nous nous bornerons au cas de $n = 2$ et nous examinerons la validité de l'égalité

$$(1) \qquad \int_a^b \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\, \psi(y)\, d_x d_y u(x, y)$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\, d_x \int_{a'}^{b'} \psi(y)\, d_y u(x, y).$$

Nous avons vu (n° 3) que, sans changer la valeur du premier membre, on peut remplacer la fonction à

variation seconde bornée $u(x, y)$ par une fonction à variation seconde bornée qui est en outre à variation (première) bornée par rapport à x et y séparément et en outre nulle pour $x = b$ ou $y = b'$. Nous allons montrer que si l'on remplace u par une telle fonction, l'égalité (1) a un sens et est exacte.

D'abord

$$\int_{a'}^{b'} \psi(y)\, d_y u(x, y)$$

a un sens et représente une fonction de x : $\theta(x)$ bien déterminée entre a et b. Le second membre devient donc

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)\, d\theta(x).$$

Il faut d'abord montrer qu'il a un sens; il suffit pour cela de faire voir que l'expression

$$\begin{aligned} w &= \sum_i |\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)| \\ &= \sum_i \left| \int_{a'}^{b'} \psi(y)\, d_y [u(x_{i+1}, y) - u(x_i, y)] \right| \end{aligned}$$

reste inférieure à un nombre fixe. Or, laissons fixes les x_i; w sera la limite de l'expression (où l'on peut prendre la même division de l'intervalle de variation des y quel que soit i)

$$\begin{aligned} &\sum_i \left| \sum_j \psi(\eta_j) \{ [u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j+1})] \right. \\ &\qquad \left. - [u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)] \} \right| \\ &\leq \sum_i \sum_j |\psi(\eta_j)| \left| \overset{2}{\underset{i,j}{\Delta}} u \right| \\ &= [\text{maximum de } |\psi(y)| \text{ dans } a', b'] \times \sum_i \sum_j \left| \overset{2}{\underset{i,j}{\Delta}} u \right|. \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition, puisque u est à deuxième variation bornée.

Maintenant démontrons que l'égalité (1) est exacte. D'après le n° 5, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\theta(x) = \sum_i \varphi(\xi_i)[\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)] - R$$

avec $|R| < 2\omega V_1$, où ω est l'oscillation maximum de $\varphi(x)$ dans des intervalles de longueurs inférieurs à δ si tous les intervalles déterminés par $x_0, x_1, \ldots$ sont inférieures à δ, et où V_1 est la variation totale de $\theta(x)$, laquelle est, d'après ce qui précède, inférieure à $M'V$, M' étant le maximum de ψ et V la variation totale seconde de u. Alors pour $\delta < \delta_0$, on aura $|R| < \frac{\varepsilon}{2}$. Supposons fixés ainsi $x_0, x_1, \ldots$, et divisons l'intervalle de variation de y en intervalles $y_0, \ldots, y_j, y_{j+1}, \ldots$, de longueurs inférieures à δ'. On a, si $x_0, x_1, \ldots$ restent fixes

$$\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} \psi(y)\, d_y\, [u(x_{i+1}, y) - u(x_i, y)]$$

$$= \lim_{\delta' = 0} \sum_j \psi(\eta_j)\, [u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j+1})]$$

$$- [u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)].$$

Donc

$$\sum_i \varphi(\xi_i)[\theta(x_{i+1}) - \theta(x_i)] = \lim_{\delta' = 0} \sum_i \sum_j \varphi(\xi_i)\, \psi(\eta_j) \overset{2}{\underset{i,j}{\Delta}} u.$$

De sorte qu'en prenant $\delta' < \delta'_0$, le premier membre différera de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ de

$$\sum_{i,j} \varphi(\xi_i)\, \psi(\eta_j) \overset{2}{\underset{i,j}{\Delta}} u.$$

Ainsi, pour $\delta < \delta_0$, $\delta' < \delta'_0$, on aura

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, d\theta(x) - \sum_{i,j} \varphi(\xi_i)\, \psi(\eta_j) \overset{2}{\underset{i,j}{\Delta}} u \right| < \varepsilon.$$

On pourra faire tendre ε vers zéro en faisant tendre vers zéro, δ_0 et δ'_0. Mais dans de telles conditions le terme $\sum_{i,j}$ tend vers le premier membre de (1) et cette égalité (1) se trouve ainsi établie.

En définitive, *si $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sont des fonctions continues respectivement dans (a, b), (a', b') et si $u(x, y)$ est une fonction à variation deuxième bornée et nulle pour $x = b$ et pour $y = b'$, on a*

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} \varphi(x)\, \psi(y)\, d_x\, d_y\, u(x, y)$$
$$= \int_a^b \varphi(x)\, d_x \int_{a'}^{b'} \psi(y)\, d_y\, u(x, y).$$

7° *Généralisation du théorème de la moyenne.* — Nous avons déjà obtenu l'inégalité

$$\left| \int_T f\, d_n u \right| < \mu V.$$

On peut établir une formule plus précise se rapprochant un peu du théorème de la moyenne, quoique notablement plus compliquée. Appelons M, m le maximum et le minimum de f dans T, (Σp) et $(-\Sigma n)$ les parties positives et les parties négatives de $\Sigma \Delta^{(n)} u$. On a

$$V = \lim v = \lim \left(\sum p + \sum n \right).$$

Au contraire $\Sigma p - \Sigma n = \Sigma \Delta^{(n)} u$ est constant, c'est-à-dire indépendant du mode de division D de T. Soit Δ_0

sa valeur. On a

$$\sum p - \sum n = \Delta_0 \quad \text{d'où} \quad \sum p = \frac{v - \Delta_0}{2}, \quad \sum n = \frac{v - \Delta_0}{2}.$$

$$v\left(\frac{m - M}{2}\right) - \Delta_0 \frac{M + m}{2} \leq m \sum p - M \sum n \leq \sum f(\xi_1, \ldots, \xi_n)^{(n)} \Delta$$

$$\leq M \sum p - m \sum n = v \frac{M - m}{2} - \Delta_0 \frac{M + m}{2}.$$

Donc à la limite

$$-V \frac{M - m}{2} \leq \int_T f\, d_n u - \frac{M + m}{2} \Delta_0 \leq V \frac{M - m}{2}.$$

De sorte qu'en appelant $\Omega = M - m$ l'oscillation de f dans T, on a

$$\int_T f\, d_n u = \Delta_0 f(c_1, \ldots, c_n) + \theta \frac{V\Omega}{2} \quad \text{avec} \quad -1 < \theta < +1,$$

$(c_1, \ldots, c_n)$ étant un certain point de T $\left(\text{où } f = \frac{M + m}{2}\right)$.

8° *L'intégrale* $\int_T f(x_1, \ldots, x_n)\, d_n u(x_1, \ldots, x_n)$ *est une fonctionnelle linéaire de* $f(x_1, \ldots, x_n)$. On voit immédiatement d'après ce qui précède que si f, g sont deux fonctions continues dans T, on a

$$\int_T f\, d_n u \pm \int g\, d_n u = \int_T (f \pm g)\, d_n u.$$

D'autre part, on a

$$\left| \int_T f\, d_n u - \int f_p\, d_n u \right| < V\,[\text{maximum de } |f - f_p| \text{ dans T}];$$

donc, si f_p tend *uniformément* vers f,

$$\int_T f\, d_n u = \lim_{p = \infty} \int_T f_p\, d_n u.$$

Autrement dit, si, prenant toujours la même fonction u, on pose

$$U_f = \int_T f\, d_n u,$$

U_f est une *fonctionnelle* définie dans le champ des fonctions continues dans T et cette fonctionnelle est linéaire, c'est-à-dire : 1° distributive

$$U_{f+g} = U_f + U_g;$$

2° continue

$$U_f = \lim U_{f_p}$$

quand f_p tend uniformément vers f.

9° *L'intégrale*

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\, d_{x_1}\ldots d_{x_n} u(x_1, \ldots, x_n)$$

est une fonctionnelle homogène d'ordre n de $\varphi(x)$.

Si u est une fonction à variation $n^{\text{ième}}$ bornée dans le domaine

$$T_0 \qquad a \leqq x_i \leqq b \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

l'intégrale

$$A_\varphi = \int_a^b \cdots \int_a^b \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\, d_{x_1}\ldots d_{x_n} u(x_1, \ldots, x_n)$$

a une valeur bien déterminée pour toute fonction $\varphi(x)$ continue dans (a, b). Cette fonctionnelle est continue, c'est-à-dire que si $\varphi_p(x)$ tend uniformément vers $\varphi(x)$, A_{φ_p} tend vers φ. Mais de plus elle est homogène et d'ordre n. Autrement dit, on a

$$A_{\lambda\varphi} = \lambda^n A_\varphi,$$

quelle que soit la constante λ, et

$$(1)\quad 0 = A_{\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n} - \sum A_{\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1}}$$
$$+ \sum A_{\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-2}} - \ldots + (-1)^{n-1} \sum A_{\varphi_1+\varphi_2} + (-1)^n A_n.$$

En effet, en posant

$$F_Y = F(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad F_{Y+Y'} = F(y_1 + y'_1, \ldots, y_n + y'_n),$$

j'ai montré ailleurs (¹) que toute fonction $F(y_1, \ldots, y_n)$, qui est un polynome de degré n, vérifie l'identité analogue à (1)

$$(1') \quad O = F_{Y^{(1)}+\ldots+Y^{(n)}} - \sum F_{Y^{(1)}+\ldots+Y^{(n-1)}}$$
$$- \sum F_{Y^{(1)}+\ldots+Y^{(n-2)}} - \ldots + (-1)^{n-1} \sum F_{Y^{(1)}} + (-1)^n F_0.$$

Ceci a lieu en particulier pour le polynome

$$F(y_1, \ldots, y_n) = y_1 \ldots y_n.$$

En remplaçant dans (1')

$$Y^{(k)} \quad \text{par} \quad y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)} \quad \text{et} \quad y_p^{(k)} \quad \text{par} \quad \varphi_k(x_p),$$

puis en multipliant par $d_n u$ et intégrant, on obtient bien l'identité (1).

[R5c]

ÉTUDE SUR LES CHAMPS DE FORCES;

PAR M. CH. HALPHEN.

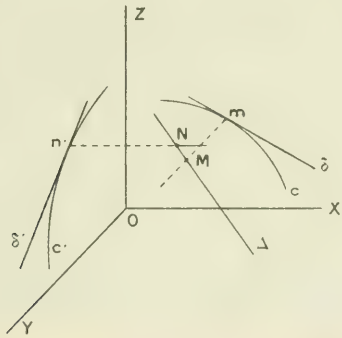
Je me propose ici d'étendre au cas des champs de forces à trois dimensions la méthode des enveloppes et une propriété signalées dans une précédente Note (²).

(¹) FRÉCHET, *Une définition fonctionnelle des polynomes* (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. IX, avril 1909, p. 1-17).

(²) Voir *Note sur les champs de forces plans*, numéro de mai 1910.

I.

1. La condition pour qu'une droite variable de l'espace, à un paramètre, admette une enveloppe, peut être mise sous une forme géométrique des plus simples. Si une telle droite Δ est tangente dans toutes ses positions à une courbe gauche Γ, ses projections sur deux plans quelconques ont évidemment des enveloppes, projections de Γ sur ces plans. Réciproquement, soient (voir *fig.*) δ et δ' les projections de la droite mobile Δ sur les plans xOz et yOz, δ et δ' ayant des enveloppes C, C′ qu'elles touchent en m et n' La droite Δ est tangente au cylindre ayant pour base la courbe C et des génératrices parallèles à Oy, en **M**; et au cylindre



ayant pour base la courbe C′ et des génératrices parallèles à Ox, en N. Si elle est tangente à une courbe gauche, ce ne peut être qu'à la courbe d'intersection de ces cylindres qui seule a C et C′ pour projections sur les plans xOz, yOz; il faut et suffit pour cela que M et N soient confondus, ce qui n'arrive pas en général. Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour

que Δ ait une enveloppe, est que M et N soient confondus, *c'est-à-dire que m et n' aient la même cote z* [1].

2. *Equations différentielles des lignes de force.* — Par tout point de l'espace, ou d'une région limitée de l'espace, $M(x, y, z)$, faisons passer une droite dirigée Δ, ligne d'action d'une force agissant en ce point, dont les cosinus directeurs α, β, γ, soient fonctions des coordonnées du point. Les équations de cette droite variable sont

$$(1) \qquad \frac{X - x}{\alpha} = \frac{Y - y}{\beta} = \frac{Z - z}{\gamma}.$$

Nous allons grouper ces droites Δ qui dépendent de trois paramètres x, y, z, de telle sorte que chaque groupe admette une enveloppe. Posons à cet effet

$$y = f(x), \qquad z = \varphi(x)$$

et remplaçons y et z par ces valeurs dans les équa-

---

[1] Soient

$$x = az - p, \qquad y = bz - q.$$

les équations de la droite Δ, où a, b, p, q sont fonctions d'un paramètre t. Prises séparément, elles représentent, la première δ et la deuxième δ', dans les plans des xz et des yz; ces droites ont des enveloppes puisqu'elles ne dépendent que d'un paramètre, et les z des points de contact m et n' s'obtiennent en les différentiant par rapport à t,

$$a'z - p' = 0 \quad \text{ou} \quad z = \frac{p'}{a'} \text{ (point } m\text{)},$$

$$b'z + q' = 0 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{q'}{b'} \text{ (point } n'\text{)}.$$

La droite Δ a donc une enveloppe si

$$\frac{a'}{b'} = \frac{p'}{q'} \quad \text{ou} \quad a'q - b'p' = 0.$$

C'est la condition classique.

tions (1), la substitution étant faite aussi dans α, β, γ; elles ne dépendent plus alors que d'un seul paramètre x. Les projections de Δ sur xOz et yOz ont pour équations

$$(\delta) \qquad X - x = \frac{\alpha}{\gamma}(Z - z),$$

$$(\delta') \qquad Y - f(x) = \frac{\beta}{\gamma}(Z - z),$$

où $z = \varphi(x)$. Les Z des points de contact de δ et δ' avec leurs enveloppes s'obtiennent en différentiant leurs équations par rapport à x, ce qui donne

$$-1 = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)'(Z - z) - \frac{\alpha}{\gamma}\varphi'(x),$$

$$-f'(x) = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)'(Z - z) - \frac{\beta}{\gamma}\varphi'(x),$$

et il faut, pour que Δ ait une enveloppe, que ces deux équations donnent pour Z la même valeur. Mais si cette enveloppe est une ligne de force, son point de contact avec Δ sera précisément le point M où est appliquée la force, c'est-à-dire $Z = z$. Pour que les équations précédentes donnent bien toutes deux $Z = z$, il faut et suffit que les fonctions φ et f satisfassent aux conditions

$$1 = \frac{\alpha}{\gamma}\varphi'(x), \qquad f'(x) = \frac{\beta}{\gamma}\varphi'(x)$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{f'(x)}{\beta} = \frac{\varphi'(x)}{\gamma}.$$

Ces équations déterminent les fonctions f et φ. Comme

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad \varphi'(x) = \frac{dz}{dx},$$

on peut les écrire, α, β, γ, étant de nouveau exprimés

en fonction de x, y, z.

$$(2) \qquad \frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Ce sont deux équations différentielles du premier ordre; l'intégrale générale contient donc deux constantes : c'est-à-dire que les lignes de force qu'elle représente dépendent de deux paramètres arbitraires, ou forment une *congruence*.

3. *Equation des surfaces de niveau.* — Ce sont les surfaces trajectoires orthogonales des lignes de force. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la ligne d'action de la force appliquée au point M (x, y, z); le plan tangent à la surface de niveau passant par ce point aura pour équation

$$(3) \qquad \alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0.$$

Ces plans dépendent de trois paramètres x, y, z; groupons-les de façon qu'ils ne dépendent plus que de deux paramètres x, y, en posant

$$z = \psi(x, y).$$

On aura alors leur enveloppe (si elle existe), en joignant à l'équation (3) celles qui en proviennent en la différentiant par rapport à x et à y :

$$(4) \qquad \alpha'_x(X - x) + \beta'_x(Y - y) + \gamma'_x(Z - z) - (\alpha - \gamma\psi'_x) = 0,$$
$$(5) \qquad \alpha'_y(X - x) + \beta'_y(Y - y) + \gamma'_y(Z - z) - (\beta - \gamma\psi'_y) = 0;$$

en résolvant les trois équations linéaires (3), (4), (5), en $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, on aura les coordonnées X, Y, Z, du point de contact du plan et de son enveloppe. Mais si nous voulons que cette enveloppe soit une surface de niveau, il faut que son point de contact avec le

plan soit précisément le point $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, où est appliquée la force; les équations (4) et (5) montrent qu'il est pour cela nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\alpha + \gamma\psi'_x = 0, \qquad \beta + \gamma\psi'_y = 0,$$

équations qui déterminent la fonction inconnue ψ. On peut les écrire

$$(6) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Ce sont deux équations aux dérivées partielles simultanées; et comme

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

on peut les remplacer par l'unique équation aux différentielles totales

$$(7) \qquad \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0.$$

Mais on sait que le problème ainsi posé n'est pas toujours possible. En effet, pour que les équations (6) soient compatibles, il faut que $-\frac{\alpha}{\gamma}$ et $-\frac{\beta}{\gamma}$ soient les dérivées partielles d'une même fonction; comme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right),$$

on doit avoir *identiquement*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$$

ou, en développant,

$$(8) \qquad \alpha\gamma'_y - \gamma\alpha'_y + \beta\alpha'_z - \alpha\beta'_z + \gamma\beta'_x - \beta\gamma'_x = 0.$$

Soit F (x, y, z) la force en un point M (x, y, z)

de l'espace; ses projections sur les trois axes sont $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$. Si elle dérive d'un potentiel $U(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on a

$$F\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F\beta = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F\gamma = \frac{\partial U}{\partial z},$$

la condition (8) est identiquement vérifiée; d'ailleurs l'équation (7) s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0,$$

et s'intègre immédiatement :

$$U(x, y, z) = \text{const.};$$

il y a donc des surfaces de niveau, ou équipotentielles. Réciproquement, supposons la condition (8) identiquement satisfaite; l'équation (7) admet alors une intégrale générale dépendant d'une constante qu'on peut mettre sous la forme

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Pour un déplacement élémentaire dx, dy, dz, sur une surface de niveau, on a alors

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0,$$

d'où

$$(9) \qquad \frac{\alpha}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\beta}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{F(x, y, z)}$$

en appelant $\frac{1}{F(x, y, z)}$ la valeur commune de ces rapports. D'où

$$F\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F\beta = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F\gamma = \frac{\partial U}{\partial z};$$

et cela montre que l'on peut placer en tout point du champ une force F (x, y, z) ayant pour ligne d'action la droite donnée en ce point, de cosinus directeurs α, β, γ, et dérivant du potentiel U. Il est clair d'ailleurs que F n'est pas arbitraire, car on déduit de (9)

$$F^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2.$$

Mais on peut évidemment appliquer en chaque point, sur la même droite, une force différente de F et ne dérivant pas d'un potentiel, sans changer ni les lignes de force, ni les surfaces de niveau ; le champ créé par cette nouvelle force aura donc une infinité de surfaces de niveau, *bien que la force ne dérive pas d'un potentiel.*

Ce qui précède nous permet d'énoncer ce théorème :

Il existe une infinité de surfaces de niveau (c'est-à-dire, la condition (8) est identiquement satisfaite) *lorsque la force qui crée le champ dérive d'un potentiel, ou peut être partout remplacée par une force de même direction dérivant d'un potentiel. Dans le cas contraire, il n'y a pas de surfaces de niveau*, à part quelques surfaces qui, éventuellement, satisferaient à la fois aux équations (7) et (8).

C'est *l'interprétation mécanique* de la condition d'intégrabilité (8).

Voici un exemple très simple. Le champ créé par une force passant par un point fixe a toujours une infinité de surfaces de niveau : ce sont des sphères concentriques. Nous pouvons prendre pour loi de cette force une fonction des coordonnées du point d'application aussi compliquée que nous voulons ; il n'y a alors aucune raison pour que les trois composantes rectangulaires de la force soient les dérivées partielles d'une

même fonction ; il n'y aura pas de potentiel. Mais, en tout point du champ, on peut à cette force en substituer une autre, de même direction, c'est-à-dire passant par le point fixe, et proportionnelle à la distance du point considéré au point fixe : elle dérive du potentiel $x^2 + y^2 + z^2$.

Si l'on se donne d'abord les surfaces de niveau

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

d'un champ, les équations différentielles des lignes de force, c'est-à-dire des trajectoires orthogonales de ces surfaces, sont

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}};$$

cela résulte immédiatement de ce qu'on a déjà vu.

II.

1. Théorème préliminaire. Voici d'abord un théorème qui sera utile :

Etant donnés une fonction de plusieurs variables $u(x, y, z)$ et un paramètre k, une identité telle que

$$(1) \qquad u(kx, ky, kz) = \varphi(k)\, u(x, y, z),$$

quels que soient k, x, y, z, ne peut avoir lieu que si la fonction $u(x, y, z)$ est homogène; la fonction $\varphi(k)$ se réduit alors à une puissance de k, dont l'exposant est le degré d'homogénéité de u.

D'abord, il est clair que la fonction $\varphi(k)$ ne peut être arbitraire. Faisons en effet $x = y = z = 1$, dans l'identité (1) ; on a la condition *nécessaire*

$$u(k, k, k) = \varphi(k)\, u(1, 1, 1),$$

et l'identité (1) s'écrit par conséquent

$$(2) \qquad \frac{u(kx, ky, kz)}{u(x, y, z)} = \frac{u(k, k, k)}{u(1, 1, 1)},$$

quels que soient x, y, z, k. Donc le quotient $\frac{u(kx, ky, kz)}{u(x, y, z)}$ ne contient ni x, ni y, ni z; c'est seulement une fonction de k. Différentions l'identité (2) par rapport à k :

$$\frac{x\, u'_{kx}(kx, ky, kz) + y\, u'_{ky}(kx, ky, kz) + z\, u'_{kz}(kx, ky, kz)}{u(x, y, z)} = \frac{u'_k(k, k, k)}{u(1, 1, 1)}$$

en désignant pour abréger, par $u'_k(k, k, k)$ l'expression

$$u'_x(k, k, k) + u'_y(k, k, k) + u'_z(k, k, k).$$

Cette identité doit encore avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y, z, et k; en particulier pour $k = 1$. Mais pour $k = 1$, $\frac{u'_k(k, k, k)}{u(1, 1, 1)}$ devient une *quantité numérique*, soit m. L'identité se réduit alors à

$$x\, u'_x(x, y, z) + y\, u'_y(x, y, z) + z\, u'_z(x, y, z) = m\, u(x, y, z),$$

quels que soient x, y, z. Il est donc *nécessaire* que la fonction $u(x, y, z)$ soit homogène et d'un certain degré m.

Quelle est alors la forme qu'a nécessairement $\varphi(k)$? Par définition, on a

$$u(kx, ky, kz) = k^m\, u(x, y, z),$$

donc

$$u(k, k, k) = k^m\, u(1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \varphi(k) = k^m.$$

L'identité (1) devient alors l'identité qui définit les fonctions homogènes

$$(3) \qquad u(kx, ky, kz) = k^m\, u(x, y, z).$$

Remarque. — On trouve ainsi pour degré d'homogénéité de u

$$m = \left[\frac{u'_k(k, k, k)}{u(1, 1, 1)}\right]_{k=1}$$

ou

$$m = \frac{u'_x(1, 1, 1) + u'_y(1, 1, 1) + u'_z(1, 1, 1)}{u(1, 1, 1)}.$$

L'identité d'Euler

$$x\,u'_x(x, y, z) + y\,u'_y(x, y, z) + z\,u'_z(x, y, z) = m\,u(x, y, z)$$

donne bien le même résultat, en faisant

$$x = y = z = 1.$$

Voici une application de ce théorème qui sera aussi utile :

Si

$$u(x, y, z) = \lambda$$

est l'équation d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine, la fonction $u(x, y, z)$ *est homogène.*

Soit a une valeur particulière du paramètre λ, et S la surface

$$u(x, y, z) = a.$$

Toute surface homothétique a pour équation

$$u(kx, ky, kz) = a;$$

par hypothèse, on peut la remplacer par l'équation

$$u(x, y, z) = b.$$

La valeur b du paramètre dépend certainement de k; posons

$$b = \frac{a}{\varphi(k)}.$$

Les équations

$$u(kx, ky, kz) = a, \qquad u(x, y, z) = \frac{a}{\varphi(k)}$$

sont identiques; on a donc

$$u(kx, ky, kz) = \varphi(k)\, u(x, y, z),$$

par suite, la fonction $u(x, y, z)$ est homogène. Il est évident que si, réciproquement, la fonction u est homogène, l'équation

$$u(x, y, z) = \lambda,$$

représente une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine.

2. *Lignes et surfaces homothétiques.* — Le point (x, y, z) décrit une ligne de force si l'on a

$$(4) \qquad \frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)},$$

et la ligne décrite par le point kx, ky, kz, sera aussi une ligne de force si ces équations ne changent pas quand on y substitue kx, ky, kz, à x, y, z. En faisant cette substitution, les numérateurs deviennent kdx, kdy, kdz; ils sont simplement multipliés par k. Si les dénominateurs sont simplement multipliés par une même fonction de k, les équations (4) ne changeront pas; mais d'après le théorème précédent, il faut et suffit pour cela que α, β, γ, *soient des fonctions homogènes de même degré*. Nous plaçant dans ce cas, considérons une courbe particulière (C), dépendant d'un seul paramètre arbitraire h,

$$u(x, y, z) = h, \qquad v(x, y, z) = h,$$

satisfaisant à (4); toutes les courbes homothétiques à

celle-là

$$u(kx, ky, kz) = h, \qquad v(kx, ky, kz) = h$$

satisfont aussi à (4) : or ces courbes dépendent de deux paramètres arbitraires et complètement indépendants, h et k; elles forment donc l'intégrale générale de (4), c'est-à-dire la congruence des lignes de force. Mais la courbe (C) engendre une surface (S) puisqu'elle ne dépend que d'un paramètre; pour chaque valeur de k, les courbes homothétiques à (C) engendrent des surfaces homothétiques de S par rapport à l'origine. Donc toutes les lignes de force peuvent être assemblées de façon à former une famille de surfaces homothétiques entre elles par rapport à l'origine. Il est presque évident d'ailleurs que ce groupement peut être fait d'une infinité de manières différentes; car soit

$$u(x, y, z) = a, \qquad v(x, y, z) = b$$

l'intégrale générale de (4); il suffit d'établir une relation quelconque entre b et a pour obtenir une courbe à un seul paramètre satisfaisant aux équations (4). Nous appellerons pour abréger *congruence homothétique* une telle congruence.

Prenons l'équation des surfaces de niveau

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0.$$

Pour qu'elle ne change pas quand x, y, z, deviennent kx, ky, kz, il faut et suffit que α, β, γ, soient homogènes et de même degré. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont homothétiques par rapport à l'origine. Donc : *Si les lignes de force d'un champ forment une congruence homothétique par rapport à un point, les surfaces de niveau, lorsqu'elles existent, sont homothétiques par rapport au même point.*

Réciproquement, soit $U(x, y, z)$ une fonction homogène; l'équation

$$U(x, y, z) = \lambda$$

représente une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine. Les dérivés $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, sont aussi homogènes, et les trajectoires orthogonales à cette famille de surfaces étant définies par les équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}},$$

les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à un point forment une congruence homothétique par rapport au même point. Par conséquent, on peut assembler ces trajectoires orthogonales d'une infinité de manières en surfaces, qui toutes sont orthogonales aux surfaces de la famille donnée, et homothétiques par rapport au même point que celles-ci.

3. *Exemple.* Donnons nous les cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}},$$

$$\beta = \frac{y}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}},$$

$$\gamma = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}},$$

qui sont des fonctions homogènes de degré zéro en x,

y, z. Les surfaces de niveau ont pour équation

$$\frac{x}{2}\,dx + \frac{y}{2}\,dy - z\,dz = 0.$$

La condition d'intégrabilité est vérifiée, et cette équation s'intègre immédiatement :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 = \lambda^2.$$

Ce sont des ellipsoïdes de révolution autour de Oz, homothétiques par rapport à l'origine. Les lignes de force ont pour équations :

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{2\,dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

On en tire facilement

$$\frac{y^2}{x^2} = a, \qquad \frac{z}{x^2} = b.$$

Prenons par exemple $b = a$; nous isolons ainsi dans la congruence une courbe à un paramètre qui engendre le cylindre parabolique $y^2 = z$; tous les cylindres paraboliques homothétiques : $(ky)^2 = kz$ sont orthogonaux aux ellipsoïdes de niveau (il est facile de le vérifier directement).

Il en est de même des cylindres paraboliques homothétiques $(kx)^2 = kz$.

Si l'on pose $b = 1 + a$, on trouve des surfaces homothétiques au paraboloïde de révolution autour de Oz : $z = x^2 + y^2$; $b = 1 - a$, des paraboloïdes hyperboliques homothétiques à $z = x^2 - y^2$; etc.

Toutes ces surfaces sont orthogonales aux ellipsoïdes de niveau.

[K2c¹]

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à l'École primaire supérieure d'Ernée (Mayenne).

I. — DROITES ET POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE.

1° Rappelons le théorème bien connu relativement au quadrilatère complet :

Les cercles décrits sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont même axe radical.

Proposons-nous d'en tirer quelques propriétés intéressantes du triangle.

Voici d'abord un théorème qui n'est autre que le précédent sous un énoncé un peu différent :

On coupe les côtés d'un triangle ABC *par une transversale quelconque, laquelle rencontre les côtés* BA, AC, CB *en* D, E, F. *Les cercles de diamètres* BE, CD *et* AF *ont même axe radical.*

Assujettissons la transversale à passer par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC. Nous obtenons les propriétés suivantes :

Les circonférences de diamètres BE, CD *et* AF *se coupent d'une part sur le cercle circonscrit O, d'autre part sur le cercle des neuf points du triangle* ABC, *en un point* K. *Leur axe radical passe par l'orthocentre* H *du triangle.*

Si des points D, E, *on abaisse les perpendiculaires* DD′ *et* EE′ *sur* CA *et* BA ; *si des points* D, F, E, F, *on abaisse des perpendiculaires sur* CA *et* CB, BA *et* CB, *les droites* E′D′, F′E″, D″F′ *se coupent au point* K.

De plus, ces trois droites passent par les milieux des segments AH, BH, CH.

La droite qui joint les orthocentres des quatre triangles formés par les côtés du triangle et la transversale passe encore en K.

On tire alors le cas particulier suivant :

Quand la transversale est la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle, le point K *devient le point de Feuerbach.*

Ainsi, on a cinq cercles qui passent au point de Feuerbach et cinq points en ligne droite.

2° Le théorème suivant est également connu :

On coupe les côtés d'un triangle ABC *par une transversale* DEF *et de* A, B, C, *on mène les perpendiculaires sur* DEF, A*a*, B*b*, C*c*. *Puis de a, b, c, on abaisse les perpendiculaires sur* BC, CA *et* AB. *Ces droites se coupent en un même point* K. *Pour une même transversale, ce point est celui du* 1°.

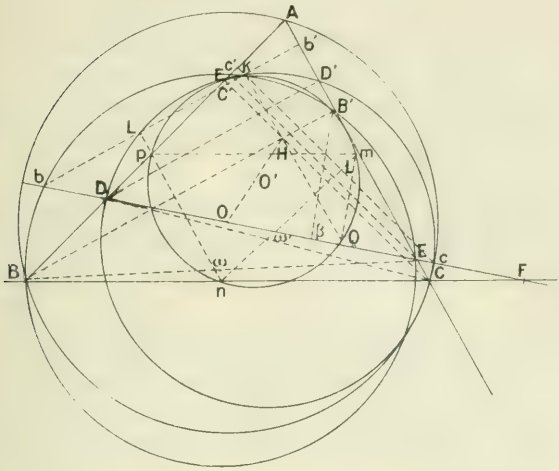
Le cas particulier suivant, moins connu peut-être, mérite l'attention :

Quand la transversale passe en O, *centre du cercle circonscrit, le point* K *décrit le cercle des neuf points du triangle.*

Soient (*fig.* 1) ω et ω′ les cercles précédents du 1°

et les perpendiculaires Bb, bb', Cc, cc'. D'après le 1°, les cercles ω et ω' se coupent sur D'E'.

Fig. 1.



Je dis que les perpendiculaires bb', cc', par exemple, passent en K.

En effet, prouvons que Kb est perpendiculaire à CA, c'est-à-dire parallèle à DD'.

Or

$$\widehat{E'Kb} = \widehat{E'Eb} \text{ (même mesure)}$$

$$= \widehat{E'D'D} \text{ (dans le quadrilatère inscrit DE'D'E).}$$

bb' est donc perpendiculaire à CA

Un raisonnement analogue concerne les perpendiculaires aa' et cc'.

Joignons KB' et abaissons B'β perpendiculaire sur DEF, B' étant le pied de la hauteur BB'.

Le quadrilatère BbKB' étant inscriptible, est un

trapèze isoscèle et

$$KB = Bb; \qquad KB = bB';$$

$$\widehat{KB'B} = \widehat{bBB'} = \widehat{BB'\beta}.$$

D'où les propriétés remarquables suivantes :

Les distances du point K *aux pieds des hauteurs du triangle égalent respectivement les distances des sommets à la transversale.*

Les distances de K *aux sommets du triangle sont égales aux distances respectives des pieds des hauteurs aux projections des sommets sur la transversale.*

Enfin *la droite* B'K, *par exemple, qui joint le pied de la hauteur* BB' *à* K, *est symétrique de la perpendiculaire* B'β *sur la transversale*, ou inversement *la symétrique de* B'β *par rapport à la hauteur* BB' *passe par* K.

On remarque aussi que le quadrilatère DC'KC étant inscriptible, DK est perpendiculaire sur CK ; de même $\widehat{CDc} = \widehat{CKc}$; etc.

Traçons le cercle d'Euler du triangle ABC et menons KQ parallèle à CA ; le triangle formé par les milieux des côtés de ABC est *mnp*.

Comme B'K = *m*Q, *m*K et *m*Q sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{pmn}$.

Alors *m*Q *donne la direction des diamètres de la parabole tangente aux côtés du triangle mnp et qui a* K *pour foyer. Ces diamètres sont donc perpendiculaires à* DEF.

Comme le centre O *du cercle circonscrit à* ABC *est*

l'orthocentre de mnp, la transversale est la directrice de la parabole.

Dans le cas plus particulier encore où la transversale est la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit, *le point* K *devient le point de Feuerbach* φ.

Alors *les distances du point de Feuerbach aux pieds des hauteurs d'un triangle égalent respectivement les perpendiculaires abaissées des sommets sur la droite* OI.

Les distances du point de Feuerbach aux sommets du triangle sont égales respectivement aux distances des pieds des hauteurs aux projections des sommets sur la droite OI.

La symétrique de B'φ, *par exemple, par rapport à la hauteur* BB', *est perpendiculaire à* OI, ou inversement *la symétrique de la perpendiculaire* B'β *à* OI *par rapport à la hauteur* BB', *passe au point de Feuerbach.*

Ce cas particulier a été donné par Mannheim, *Nouvelles Annales*, janvier 1907.

De plus, *le point de Feuerbach et la droite* OI *sont le foyer et la directrice d'une parabole tangente aux côtés du triangle mnp.*

Ce cas particulier a été démontré en 1906 dans les *Nouvelles Annales* (p. 510) par un article de M. Bouvaist.

Revenons au cas général de tout à l'heure.

Les centres des cercles ω et ω' sont sur les côtés *np* et *mn*. Les points d'intersection de K*b*, K*c* avec ces côtés déterminent la droite de Simson LL' du point K par rapport au triangle *mnp*.

D'ailleurs L et L' sont milieux de K*b* et K*c*.

Donc *la droite de Simson du point* K *par rapport au triangle mnp est parallèle à la transversale.*

M. Ch. Michel, professeur au Lycée Saint-Louis, a énoncé en 1904 (*Bulletin de Mathématiques élémentaires*) le cas particulier correspondant à la transversale OI :

La droite de Simson du point de Feuerbach relative au triangle mnp, est parallèle à la droite OI.

Enfin signalons encore les propriétés suivantes qui apparaissent d'elles-mêmes dans ce qui précède :

Soient un point K *sur une circonférence et un triangle inscrit mnp. On projette* K *sur les côtés mn et np, en* LL'. *La projection du troisième côté mp sur* LL' *est égale à* LL'.

La droite qui joint le point de Feuerbach à l'orthocentre d'un triangle est la directrice de la parabole tangente aux côtés du triangle et à la droite OI.

Si le point de Feuerbach est sur une hauteur d'un triangle, la droite OI *est parallèle à l'un des côtés, et réciproquement.*

II. — Cercles remarquables du triangle.

Il existe quelques cercles du triangle, que nous n'avons pas encore eu l'occasion de rencontrer.

1° *Quand on décrit des pieds des hauteurs d'un triangle* ABC *comme centres, des cercles de même rayon, ils coupent les côtés du triangle formé en joignant les milieux des côtés de* ABC, *en six points concycliques.*

Soient ABC le triangle donné, MNP celui qui est formé en joignant les milieux des côtés du premier; des pieds des hauteurs D, E, F, décrivons des circonfé-

rences de rayon R′, lesquelles coupent les côtés de MNP en G, Q, K, L, R, S.

Les quatre points G, Q, K, L, par exemple, sont sur un cercle. En effet, ω étant le milieu de GQ,

$$GM.MQ = \overline{G\omega}^2 - \overline{M\omega}^2 = \overline{GD}^2 - (\overline{D\omega}^2 + \overline{M\omega}^2)$$
$$= R'^2 - \overline{MD}^2 = R'^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

On a aussi

$$KM.ML = R'^2 - \overline{ME}^2 = R'^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

C. Q. F. D.

Par un raisonnement analogue on établit que H, G, R, S sont sur le cercle précédent. Le centre de ce cercle est l'orthocentre H du triangle ABC.

Calculons son rayon ρ. On a successivement, en appelant R le rayon du cercle ABC,

$$R'^2 - \frac{c^2}{4} = MG.MQ = \rho^2 - \overline{MH}^2;$$

or

$$2\overline{MH}^2 + \frac{c^2}{2} = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2;$$

mais

$$c^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + 2EH.BH = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + R^2 - \overline{OH}^2.$$

Alors finalement

$$\rho^2 = R'^2 + 4R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

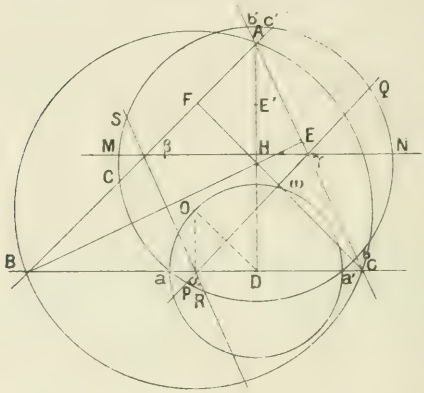
Cas particulier. — Le cas où $R' = R$ est particulièrement intéressant, nous le retrouverons tout à l'heure

$$\rho^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

2° *Des pieds des hauteurs d'un triangle* ABC *comme centres, on décrit des circonférences passant par le centre du cercle circonscrit; elles coupent les côtés du triangle en six points concycliques.*

Soient ABC le triangle donné (*fig.* 2) et a, a', b, b', c, c'

Fig. 2.



les six points obtenus avec les circonférences D, E, F, passant en O.

Je dis que ces six points sont sur une circonférence de centre H. En effet, le triangle rectangle HDa donne

$$\overline{Ha}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{Da}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{O\alpha}^2 - \overline{\alpha D}^2;$$

or

$$O\alpha = \frac{AH}{2} = HE';$$

d'où

$$\overline{Ha}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{HE'}^2 + \overline{\alpha D}^2,$$

en appelant E' le milieu de AH.

Ajoutons et retranchons AH.AD au deuxième membre de l'égalité précédente et remarquons que αE' est le diamètre du cercle des neuf points de ABC, il

vient finalement

$$\overline{Ha}^2 = R^2 - AH.HD.$$

On a de même

$$\overline{Hb}^2 = R^2 - BH.HE; \qquad \overline{Hc}^2 = R^2 - CH.HF,$$

c'est-à-dire

$$Ha = Hb = Hc,$$

puisque

$$AH.HD = BH.HE = CH.HF = \frac{R^2 - \overline{OH}^2}{2}.$$

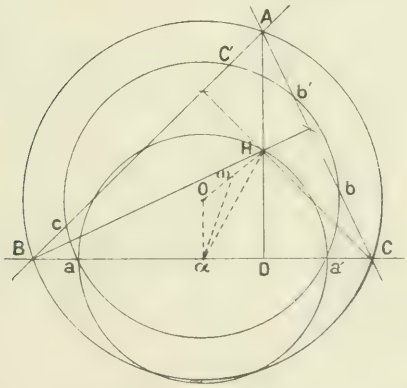
Les points a, a', b, b', c, c' sont sur un cercle H de rayon

$$\rho^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Ce cercle, prévu dans le cas particulier du 1°, peut d'ailleurs être identifié directement.

Des pieds des hauteurs D, E, F, décrivons des cercles

Fig. 3.



de rayon R, qui coupent les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ en six points concycliques.

Ce cercle contient aussi les six points a, a', b, b', c, c' et l'on obtient ainsi douze points du triangle concycliques.

En effet, il suffit de prouver par exemple que

$$P\alpha . \alpha Q = a\alpha . \alpha a'.$$

Soit ω le point où CF coupe $\alpha\gamma$.

On a successivement

$$\begin{aligned} P\alpha . \alpha Q &= \overline{P\omega}^2 - \overline{\alpha\omega}^2 = \overline{PF}^2 - (\overline{F\omega}^2 + \overline{\alpha\omega}^2) \\ &= \overline{PF}^2 - \overline{F\alpha}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{\alpha C}^2 \\ &= \overline{O\alpha}^2 = a\alpha . \alpha a'. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Appelons φ le point de Feuerbach relatif au triangle ABC, dont le centre du cercle circonscrit est O, l'orthocentre H et le centre du cercle des neuf points ω.

On a alors

$$\overline{\varphi O}^2 + \overline{\varphi H}^2 = 2\overline{\varphi\omega}^2 + \frac{\overline{OH}^2}{2};$$

d'où l'on tire

$$\overline{\varphi O}^2 + \overline{\varphi H}^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Le rayon précédent ρ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés φO et φH. Si sur φH on élève une perpendiculaire $\varphi K = \varphi K^2 = \varphi O$, les points K et K' sont sur le cercle H précédent.

Finalement *le cercle* H *de rayon* ρ *contient quatorze points remarquables du triangle.*

3° *Des milieux des côtés d'un triangle* ABC

comme centres, on décrit des circonférences passant par l'orthocentre. Elles coupent les côtés du triangle en six points concycliques.

Soient le triangle ABC et les six points a, a', b, b', c, c'. Je dis qu'ils sont sur un cercle.

Dans le triangle rectangle $Oa\alpha$ (*fig.* 3), on a

$$\overline{Oa}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{a\alpha}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{\alpha H}^2 = 2\overline{\alpha\omega}^2 + \frac{\overline{OH}^2}{2}$$
$$= \frac{R^2 + \overline{OH}^2}{2} = \text{const.}.$$

R étant le rayon du cercle O et ω le centre du cercle des neuf points.

Pour la même raison

$$\overline{Ob}^2 = \overline{Oc}^2 = \overline{Oa}^2 = 5R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Le cercle O obtenu est égal au cercle H de rayon ρ.

Remarque. — D'après la remarque précédente, si l'on élève une perpendiculaire

$$\varphi K = \varphi K' = \varphi H$$

sur φO, K et K' sont sur le cercle O.

Et *ce cercle* O *contient huit points remarquables du triangle.*

[S2a]

SUR LE THÉORÈME DE LAGRANGE EN HYDRODYNAMIQUE;

PAR M. H. VILLAT.

On sait que le théorème de Lagrange relatif au mouvement des fluides parfaits est ainsi conçu :

Supposons que dans le fluide en mouvement il existe un potentiel uniforme $Q(x, y, z, t)$ *pour les accélérations. Dans ces conditions, si les tourbillons sont nuls à un instant déterminé* $t = 0$, *ils seront nuls à tout instant* t.

La démonstration suivante, presque intuitive, et que je crois nouvelle, présente peut-être quelque intérêt.

Prenons les variables de Lagrange. Soient a, b, c, les coordonnés initiales d'un élément fluide à l'instant $t = 0$; soient

$$x = f(a, b, c, t), \qquad y = g(a, b, c, t), \qquad z = h(a, b, c, t)$$

les coordonnées du même élément à l'instant t.

Désignons enfin par u, v, w les projections de la vitesse de cet élément au même instant t. On sait qu'on a pendant toute la durée du mouvement

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

(*cf.* APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. III, n° 729).

Ceci posé, dire que les tourbillons sont nuls à l'instant t est équivalent à la condition suivante : à cet instant, pour toute ligne L fermée prise dans le fluide,

l'intégrale

$$J = \int_L u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

est nulle.

Soit L_0 la position de la ligne fluide L, dont on suivra la déformation avec le temps, à l'instant $t = 0$. Par hypothèse, l'intégrale précédente est nulle pour $t = 0$ quelle que soit la ligne L_0 fermée considérée à cet instant dans le fluide.

Appelons s un paramètre propre à fixer la position du point (abc) sur la ligne L_0, et variant de zéro à S lorsque ce point décrit cette ligne en entier. Par exemple s sera l'arc de la courbe L_0 compté à partir d'une origine arbitraire, et S sera la longueur de la courbe tout entière. Quand s variera de zéro a S le point (xyz) décrira la ligne fluide fermée L. Nous désignerons par x'_s, y'_s, z'_s les dérivées de x, y, z, par rapport au paramètre s, dont ils sont fonctions par l'intermédiaire de a, b, c.

On peut alors écrire

$$J = \int_0^S (u x'_s + v y'_s + w z'_s)\,ds.$$

Nous allons faire voir que la dérivée $\frac{dJ}{dt}$ de J, par rapport au temps, est toujours nulle. Il en résultera que l'intégrale J sera constante, et par suite qu'elle sera toujours nulle, puisqu'elle est nulle pour $t = 0$. Le théorème de Lagrange sera alors démontré.

On a

$$(2) \qquad \frac{dJ}{dt} = \int_0^S \left(\frac{du}{dt} x'_s + \frac{dv}{dt} y'_s + \frac{dw}{dt} z'_s\right) ds$$
$$+ \int_0^S \left(u \frac{dx'_s}{dt} + v \frac{dy'_s}{dt} + w \frac{dz'_s}{dt}\right) ds.$$

Mais il vient, d'après (1),

$$\int_0^S \left(\frac{du}{dt} x'_s - \frac{dv}{dt} y'_s - \frac{dw}{dt} z'_s \right) ds$$

$$= \int_0^S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} x'_s - \frac{\partial Q}{\partial y} y'_s + \frac{\partial Q}{\partial z} z'_s \right) ds = \int_L dQ = 0.$$

Puis on peut écrire

$$\frac{dx'_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial u}{\partial s},$$

et de même

$$\frac{dy'_s}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{dz'_s}{dt} = \frac{\partial w}{\partial s}.$$

Par suite, il vient

$$\int_0^S \left(u \frac{dx'}{dt} + v \frac{dy'}{dt} + w \frac{dz'}{dt} \right) ds$$

$$\int_0^S \left(u \frac{dx'_s}{dt} + v \frac{dy'_s}{dt} + w \frac{dz'_s}{dt} \right) ds$$

$$= \int_0^S \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + w \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds = \frac{1}{2} \left[u^2 + v^2 + w^2 \right]_0^S = 0.$$

En revenant à (2), on voit bien qu'on a $\frac{dJ}{dt} = 0$, et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de Géométrie descriptive, par *F.-G. M.* (4e édition) 1 volume in-8 de x-1099 pages; chez Mame, à Tours.

Ce Livre, qui a dû demander un travail considérable, paraît bien être le recueil le plus étendu d'exercices de Géométrie descriptive publié jusqu'à ce jour. C'est même moins un recueil d'exercices qu'un traité se suffisant à lui-même . toutes les définitions, toutes les constructions fondamentales, toutes les méthodes générales s'y trouvent en effet rappelées avec soin; seulement la plus grande partie du Livre est consacrée à des applications, et c'est ce qui lui vaut son titre.

L'Ouvrage est si volumineux qu'il serait impossible d'en donner un résumé un peu fidèle. Disons seulement que les questions les plus diverses y sont étudiées, et qu'elles présentent les difficultés les plus variées : il y a des problèmes élémentaires, des problèmes portant sur le programme de la classe de Mathématiques Spéciales, et même des problèmes qui dépassent ce dernier, par exemple des constructions relatives aux surfaces hélicoïdales, à la surface des ondes, etc.

Ajoutons enfin que le Livre est très riche en détails de Géométrie pure, et que ce n'est pas là son moindre attrait. Les combinaisons si nombreuses auxquelles donne lieu l'intersection des surfaces sont l'occasion d'une foule de notes et de commentaires du plus haut intérêt sur des courbes algébriques et transcendantes de toute sorte. Les renseignements bibliographiques abondent aussi.

L'Ouvrage est certes un peu touffu, et ne devra pas être mis sans discernement entre les mains des débutants (c'est d'ailleurs, si je ne me trompe, un « Livre de Maître », dans la série de Volumes à laquelle il appartient). Mais il est éminemment propre à donner idée de la prodigieuse richesse des

formes géométriques, et, consulté par des élèves déjà d'une certaine force, il contribuera certainement à développer en eux le goût de la Science. R. B.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2126

1909, p. 192.

Soient a, b, c, d les points de Frégier situés sur les normales PA, PB, PC, PD, *menées du point* P *à une conique* (C).

L'hyperbole équilatère passant par a, b, c, d rencontre la conique (C) *en quatre points* A′, B′, C′, D′, *où les normales à la conique* (C) *sont concourantes en un point* P′. *Les points de Frégier a′, b′, c′, d′ situés sur les normales* P′A′, P′B′, P′C′, P′D′ *sont sur l'hyperbole d'Apollonius relative à* P.

(Georges Cuny.)

Solution,

Par M. E.-N. Barisien.

Supposons que la conique donnée est l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées de A, B, C, D; (α, β) celles de P; (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3), (x'_4, y'_4) les coordonnées de A′, B′, C′, D′; (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_4, Y_4) les coordonnées des points de Frégier relatifs à A, B, C, D; (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2), (X'_3, Y'_3), (X'_4, Y'_4) les coordonnées des points de Frégier a', b', c', d'.

On sait que les coordonnées du point de Frégier a sont, en fonction de celles de A,

$$(1) \qquad X_1 = \frac{c^2}{a^2 - b^2}x_1, \qquad Y_1 = -\frac{c^2}{a^2 - b^2}y_1.$$

L'hyperbole d'Apollonius relative à P a pour équation

$$(2) \qquad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

On a donc

$$(3) \qquad c^2 x_1 y_1 + b^2 \beta x_1 - a^2 \alpha y_1 = 0.$$

Mais de (1) on tire

$$x_1 = \frac{(a^2 + b^2)}{c^2} X_1, \qquad y_1 = -\frac{(a^2 + b^2)}{c^2} Y_1.$$

Ces valeurs étant substituées dans (3), il en résulte

$$(a^2 - b^2) X_1 Y_1 - b^2 \beta X_1 - a^2 \alpha Y_1 = 0.$$

Donc, chacun des quatre points tels que (X_1, Y_1) est situé sur l'hyperbole équilatère

$$(4) \qquad (a^2 + b^2) XY - b^2 \beta X - a^2 \alpha Y = 0.$$

Cette hyperbole peut être assimilée à une hyperbole d'Apollonius relative à un point $P'(\alpha', \beta')$, dont l'équation est

$$(5) \qquad c^2 XY + b^2 \beta' X - a^2 \alpha' Y = 0.$$

En effet, si l'on identifie (4) et (5), il vient

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} = \frac{\beta'}{-\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Les coordonnées du point P′ sont donc, en fonction de celles de P,

$$(6) \qquad \alpha' = \frac{\alpha c^2}{a^2 + b^2}, \qquad \beta' = -\frac{\beta c^2}{a^2 + b^2}.$$

On a pour un point (x_1, y_1), d'après (5),

$$(7) \qquad c^2 x'_1 y'_1 + b^2 \beta' x'_1 - a^2 \alpha' y'_1 = 0.$$

Or,

$$X'_1 = \frac{c^2}{a^2 + b^2} x'_1, \qquad Y'_1 = -\frac{c^2}{a^2 + b^2} y'_1,$$

$$x'_1 = \frac{(a^2 + b^2) X'_1}{c^2}, \qquad y'_1 = -\frac{(a^2 + b^2) Y'_1}{c^2}.$$

En portant ces valeurs dans (7), cette équation devient

$$(8)\qquad (a^2+b^2)^2 X'_1 Y'_1 - b^2c^2\beta X'_1 + a^2c^2\alpha Y'_1 = 0.$$

Ceci montre que les points a', b', c', d' sont situés sur l'hyperbole

$$(9)\qquad (a^2+b^2)^2 X' Y' - b^2c^2\beta X' + a^2c^2\alpha Y' = 0.$$

Ce n'est pas l'hyperbole d'Apollonius relative à P, comme le dit l'énoncé. Mais on peut l'identifier avec l'hyperbole d'Apollonius relative à un point $P''(\alpha'', \beta'')$

$$(10)\qquad c^2 X' Y' - b^2\beta'' X' - a^2\alpha'' Y' = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{c^2}{(a^2-b^2)^2} = \frac{\beta''}{-c^2\beta} = \frac{-\alpha''}{c^2\alpha}.$$

Donc l'hyperbole (9) rencontre l'ellipse en quatre points A'', B'', C'', D'' où les normales à l'ellipse sont concourantes en P'', dont les coordonnées sont

$$\alpha'' = -\frac{c^4\alpha}{(a^2-b^2)^2}, \qquad \beta'' = -\frac{c^4\beta}{(a^2+b^2)^2}.$$

Autre solution par M. Bouvaist.

NOTE.

La question 2152 que contient le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, a déjà été proposée dans le même recueil par M. d'Ocagne, sous le n° 1968 (4e série, t. III, p. 144) et résolue, même Tome, p. 238.

[O3e]

SUR L'ALLURE D'UNE COURBE;

PAR M. R. ALEZAIS.

Ce qu'il y a d'essentiel dans cette question est bien connu et se trouve clairement exposé dans nombre d'ouvrages; mais, pour caractériser l'allure, on est amené à faire certaines conventions, et tous les auteurs ne font pas les mêmes. Mon but, dans cette Note, est de rapprocher et de comparer ces différentes manières de procéder. Comme je ne me propose pas de refaire la théorie, je me contenterai de rappeler sommairement l'état de la question, et je ne considérerai que le cas d'un arc de courbe sans point singulier ni point stationnaire.

Quand une courbe n'est pas plane, un quelconque de ses arcs MM′ n'est pas tout entier dans le plan osculateur à l'une de ses extrémités M; si les conditions voulues de continuité sont réalisées et si l'arc est suffisamment petit, le point qui parcourt l'arc de M en M′ va toujours en s'éloignant du plan osculateur en M, mais il peut s'éloigner d'un côté ou de l'autre, et ainsi l'arc peut affecter deux formes. C'est cette manière d'être, susceptible de deux déterminations et de deux seulement, qui s'appelle l'allure de l'arc de courbe.

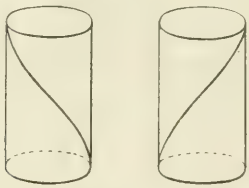
En dehors de toute convention, on peut caractériser l'allure par le sens dans lequel un observateur placé à l'une des extrémités de l'arc voit tourner la binormale quand le point se rapproche de lui en parcourant l'arc. Il est facile de se rendre compte que l'apparence ne

change pas quand l'observateur se place successivement aux deux extrémités de l'arc ; on pourra donc définir l'allure d'un arc très petit en disant qu'un observateur placé à l'une de ses extrémités voit tourner la binormale dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse des aiguilles d'une montre quand le point se rapproche de lui en suivant l'arc [1].

Il est d'usage d'appliquer aux deux allures les mots *dextrorsum* et *sinistrorsum ;* mais ici commence la divergence. Des deux manières de faire correspondre les deux mots aux deux allures, l'une, d'après M. v. Mangoldt (*Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, III, D. 1, 2. Note 180), est d'usage en technique et l'autre en botanique, mais les mathématiciens ne sont pas d'accord.

Pour les botanistes l'arc est dextrorsum si la binormale s'avance vers l'observateur en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, sinistrorsum quand elle s'avance en tournant en sens inverse. C'est le con-

Fig. 1.



Spire d'hélice dextorsum.

Usage de la Botanique. Usage de la Physique.

traire en technique et aussi en physique. J'appellerai les deux usages *l'usage de la Botanique* et *l'usage de la Physique*.

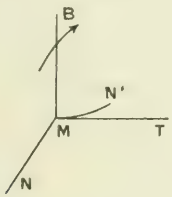
---

[1] *Cf.* De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 281.

La figure, où je suppose que les cylindres tournent vers l'observateur leur convexité, applique ces dénominations à une spire d'hélice.

Soient M un point de la courbe ; x, y, z ses coordonnées exprimées en fonction d'un paramètre ; Mt la tangente en M prise dans un sens déterminé arbitraire ; je supposerai que c'est le sens où le paramètre croît ; MN la normale principale dirigée vers le centre de courbure et MB la binormale choisie de manière que le trièdre MtNB soit orienté comme le trièdre de réfé-

Fig. 2.



rence Oxyz. J'appellerai *positives* par rapport à un trièdre quelconque Oxyz, les rotations qui amènent Ox sur Oy, Oy sur Oz, Oz sur Ox. Dans ces conditions, la rotation de la binormale, dont j'ai parlé plus haut et qu'on peut considérer comme une rotation instantanée autour de la tangente en M, sera positive ou négative par rapport au trièdre MtNB suivant que le déterminant des points stationnaires

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

(qui n'est pas nul par hypothèse) sera lui-même positif ou négatif. On se rend compte de ceci en remarquant d'abord que Δ est la limite pour $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ de

$\frac{\Delta_1}{h_1^3 h_2^2 h_3}$, en posant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

et en supposant que, x, y, z correspondant à la valeur t du paramètre, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) sont trois points de la courbe correspondant aux valeurs $t + h_1$, $t + h_1 + h_2$, $t + h_1 + h_2 + h_3$ avec h_1, h_2, h_3 positifs et très petits. Il n'y a plus ensuite qu'à transporter $Oxyz$ sur $MtNB$. Les deux trièdres ayant même orientation, Δ_1 n'aura pas changé de signe ; il aura d'ailleurs pris la forme

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

avec x_1 et y_2 positifs. Δ_1 est maintenant du signe de z_3, or z_3 positif correspond manifestement à une rotation positive de la binormale autour de la tangente.

Le signe de Δ est donc intimement lié au sens de la rotation qui nous a servi à définir l'allure. Toutefois, il s'est agi dans cette définition de l'aspect qu'offre cette rotation à un observateur placé dans une position particulière ; or, cet aspect, pour une rotation de signe déterminé, change avec l'orientation des axes. Il est donc nécessaire de définir cette orientation.

Je dirai avec M. Kneser (*Journal de Crelle*, t. 113, *Bemerkungen über die Frenet-Serretschen Formeln*, p. 100) que le trièdre $Oxyz$ est orienté *est-sud-zénith* ou *ouest-sud-zénith* suivant que Ox se dirige vers l'est ou vers l'ouest, quand on a placé le plan zOy dans le

méridien avec Oz dirigé vers le zénith et Oy dirigé vers le sud.

Supposons le trièdre est-sud-zénith, si l'arc MM' est au-dessus du plan osculateur, ce qui, nous l'avons vu, correspond à $\Delta > 0$, la binormale vue de M' paraîtra tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, quand le point décrivant ira de M en M'. Ceci suffit à établir la correspondance suivante entre les signes de Δ et les allures.

Usage de la Botanique.

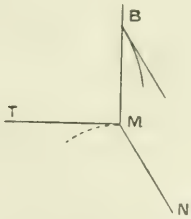
	$\Delta > 0$.	$\Delta < 0$.
Trièdre est-sud-zénith.....	*dextrorsum*	*sinistrorsum*
Trièdre ouest-sud-zénith...	*sinistrorsum*	*dextrorsum*

Usage de la Physique.

	$\Delta > 0$.	$\Delta < 0$.
Trièdre est-sud-zénith.....	*sinistrorsum*	*dextrorsum*
Trièdre ouest-sud-zénith...	*dextrorsum*	*sinistrorsum*

C'est le plus souvent d'après le signe du rayon de torsion T que l'on caractérise l'allure ; T est relié à Δ

Fig. 3.



et aux coefficients A, B, C du plan osculateur par la formule

$$T = \pm \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta},$$

mais certains auteurs prennent le signe $+$ et font $\Delta T > 0$; d'autres prennent l'autre signe et font $\Delta T < 0$: il y a donc huit combinaisons possibles ; voici le tableau des correspondances entre le signe de T et l'allure dans chacune d'elles.

$\Delta T > 0$:

		Dextrorsum.	*Sinistrorsum.*
Trièdre est-sud-zénith...	I. Botanique.	$T > 0$	$T < 0$
	I'. Physique..	$T < 0$	$T > 0$
Trièdre ouest-sud-zénith.	II. Botanique.	$T < 0$	$T > 0$
	II'. Physique..	$T > 0$	$T < 0$

$\Delta T < 0$:

		Dextrorsum.	*Sinistrorsum.*
Trièdre est-sud-zénith...	III. Botanique.	$T < 0$	$T > 0$
	III'. Physique..	$T > 0$	$T < 0$
Trièdre ouest-sud-zénith.	IV. Botanique.	$T > 0$	$T < 0$
	IV'. Physique..	$T < 0$	$T > 0$

On écrit $T = \frac{ds}{d\tau}$ en appelant s l'arc de la courbe et τ l'arc de l'indication sphérique de la torsion. On prend en général ds positif. Quant au sens des arcs croissants sur l'indicatrice, on est libre, assurément, de le choisir comme on l'entend, et c'est ce qui explique que l'on ait pu adopter soit l'un des quatre premiers systèmes, soit l'un des quatre derniers.

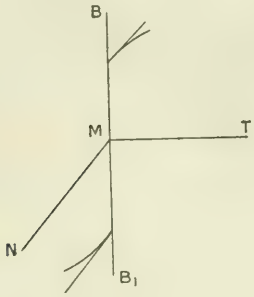
Quelques auteurs font peu usage de l'indicatrice ; ils envisagent $d\tau$ comme la rotation infiniment petite de MB autour de Mt ; ils sont ainsi amenés à prendre T positif quand cette rotation est positive et, par suite, d'après ce que j'ai dit plus haut, à prendre T et Δ de même signe.

C'est le cas de Frenet dans l'article où il a publié ses fameuses formules (*Journal de Liouville*, t. XVII, 1852, p. 437). Il montre d'ailleurs le lien entre le

signe de T et les deux manières de tourner du plan osculateur, mais sans caractériser autrement l'allure.

M. Jordan (*Traité d'Analyse*, 2e éd., t. I, p. 465 et 470) et M. Humbert (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 399

Fig. 4.



et 403) font aussi l'hypothèse $\Delta T > 0$, et ils écrivent les formules de Frenet comme Frenet lui-même les a écrites, mais ils ne parlent pas explicitement de l'allure.

M. Kneser, dans son article du *Journal de Crelle* cité plus haut, traite au contraire cette question *ex-professo*. Il suppose $\Delta T > 0$ et il en donne la raison que je viens de rappeler ; avec Gauss et Möbius, il oriente son trièdre ouest-sud-zénith ; il suit l'usage de la Physique ; il est donc dans le système II' et il conclut à *rechts gewunden* pour $T > 0$ et à *links gewunden* pour $T < 0$.

M. v. Mangoldt, dans l'*Encyclopédie* (III D 1, 2, p. 77), considère toutes les dispositions de M. Kneser comme les plus usuelles, tout en remarquant qu'elles ne sont pas universellement adoptées.

Les autres auteurs qui, à ma connaissance, traitent complètement la question, supposent $\Delta T < 0$, et ils

écrivent les formules de Frenet comme Serret les a écrites. Pour eux, $d\tau$ n'est plus une rotation infiniment petite, mais le déplacement infiniment petit du point qui décrit l'indicatrice de la torsion : comme ce déplacement a lieu suivant une droite parallèle à la normale principale, ils le considèrent comme positif quand il se fait dans la direction positive de cette normale ; cette direction positive correspond à une rotation négative autour de la tangente : ils sont amenés à prendre Δ et T de signes contraires.

M. Goursat (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 537) oriente le trièdre ouest-sud-zénith, et il suit l'usage de la Botanique (système IV) ; il conclut à dextrorsum pour $T > 0$ et à sinistrorsum pour $T < 0$.

M. Raffy (*Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse*, p. 72 et 89) et M. de la Vallée-Poussin (*Cours d'Analyse*, t. I, p. 280 et 282) orientent le trièdre est-sud-zénith, ils suivent l'usage de la Physique (système III') ; ils concluent comme les auteurs précédents.

M. Scheffers (*Einführung in die Theorie der Curven*, t. I, p. 181 et 200) fait les mêmes hypothèses, sauf qu'il suit l'usage de la Botanique (système III) et il conclut par suite à *rechts gewunden* pour $T < 0$ et à *links gewunden* pour $T > 0$.

M. Bianchi (*Lezioni di Geometria differenziale*, 1re éd., p. 10-12), qui, lui aussi, supppose $\Delta T < 0$ et qui applique les mots *destrorsa* et *sinistrorsa* à la manière de la Physique, conclut, comme M. Scheffers, à *destrorsa* pour $T < 0$ et à *sinistrorsa* pour $T > 0$. Pour être conséquent avec lui-même, il doit orienter son trièdre ouest-sud-zénith et se trouver dans le système IV'. Voici comment il explique son orientation : *Supposons*, dit-il, *que sur la face positive du plan xy*

la direction positive Ox *se trouve à droite par rapport à* Oy. — Ceci correspond, en effet, à l'orientation ouest-sud zénith, à la condition de supposer que l'observateur qui regarde Ox est debout sur la face positive du plan xy en un point de la partie négative de Oy. Il est à remarquer que la première édition de l'Ouvrage de M. Bianchi porte la même date, 1894, que le Tome 113 du *Journal de Crelle* où se trouve l'article de M. Kneser et que tous les autres Ouvrages qui traitent à fond la question sont postérieurs.

Serret, à qui nous devons l'indicatrice [1], ainsi que notre manière d'écrire les formules de Frenet (*Journal de Liouville*, t. XVI, p. 193 et *Cours de calcul différentiel et intégral*, 2e éd., t. I, p. 408) considérait T comme une quantité essentiellement positive. Les auteurs qui sont venus peu après lui ont fait de même.

C'est le cas de Salmon (*Géométrie à trois dimensions*, 2e partie, p. 135). Tout en donnant l'interprétation géométrique de Δ, il n'en tire aucune conséquence ponr l'allure de la courbe.

De même, Gilbert (*Cours d'Analyse*, 4e éd., p. 249) veut qu'on prenne le signe de l'équation de T de manière que cette expression soit positive. Il est à remarquer qu'il écrit néanmoins les formules de Frenet comme Frenet lui-même.

Bertrand (*Calcul différentiel*, p. 622 et 624) écrit toutes les formules comme Serret, mais sans dire explicitement s'il considère ou non T comme une quantité positive.

De même Hoüel (*Cours de calcul infinitésimal*,

---

(1) La première idée est due à Euler. *Cf.* V. Kommerel, dans *Vorlesungen über Geschichte der Math.*, von M. Cantor, 4e vol., p. 526-527.

t. II, p. 142) écrit

$$T = \frac{A^2 - B^2 - C^2}{\Delta},$$

sans insister sur le signe. Il ne donne pas les formules de Frenet, mais il propose un exercice (n° 13, p. 275) qui suppose qu'il les écrit comme Serret.

M. Jordan, dès sa première édition, t. I, 1882, p. 272 et 278-279) écrit très correctement les formules comme Frenet, mais il ne justifie pas le choix de son signe dans l'expression de T.

Le premier qui a bien mis en évidence que les formules de Frenet écrites à la manière de Serret (en supposant le trièdre $MtNB$ orienté comme celui des axes et T grandeur algébrique) entraînent

$$\Delta T = -(A^2 - B^2 + C^2),$$

est M. Laurent en 1887 (*Traité d'Analyse*, t. II, p. 373).

La même année M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, p. 10) a mis le même fait en évidence en remarquant que, dans les mêmes conditions, la torsion est du signe contraire de la composante de la rotation autour de la tangente.

M. Königs (*Leçons de Cinématique*, p. 125) reproduit le calcul de M. Darboux. Dans l'étude des mouvements hélicoïdaux (p. 103), il oriente le trièdre est-sud-zénith et suit l'usage de la Botanique.

En 1891, M. Picard (*Traité d'Analyse*, 1e éd., t. I, p. 365-366) fait seulement remarquer qu'il faut que le signe de T soit choisi d'une manière convenable pour que les formules de Serret soient vérifiées.

Vinrent ensuite l'article de M. Kneser et l'Ouvrage de M. Bianchi, si précis sur la question; néanmoins

quelques auteurs postérieurs l'ont de nouveau laissée indécise.

MM. Rouché et Lévy (*Analyse infinitésimale*, t. I, p. 415 et 420) donnent un double signe à l'expression de T; ils écrivent les formules de Frenet comme Frenet et ne parlent pas de l'allure.

M. Niewenglowski (*Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 116 et 119) donne en grandeur et *en signe*

$$\Delta T = \frac{1}{R^2},$$

et néanmoins il propose comme exercice d'établir les formules de Frenet écrites à la manière de Serret.

M. Pascal (*Repertorium*, éd. allemande, t. II, p. 459-460) écrit de même les formules de Frenet et ne donne que l'expression irrationnelle de T. Il n'introduit les mots *rechts gewunden* et *links gewunden* qu'à propos de l'hélice (p. 552) et il suit l'usage de la Physique.

M. Appell (*Éléments d'Analyse*, 2e éd., p. 382) est revenu au système de Serret; non seulement il écrit comme lui les formules de Frenet, mais il suppose T essentiellement positif. Toutefois, au lieu d'orienter le trièdre M*t*NB comme celui des axes, il choisit son orientation de manière à pouvoir en déduire l'allure de la courbe.

Il résulte du premier des tableaux dressés plus haut, que si, comme fait M. Appell, on se sert de la terminologie de la Botanique, avec $\Delta < 0$, dextrorsum correspond à l'orientation ouest-sud-zénith. On remarque que dans ces conditions, la tangente à l'indicatrice sphérique de la torsion a même sens que la normale principale. En d'autres termes, les tangentes aux deux indicatrices sphériques de la torsion et de la courbure

sont parallèles et de même sens. Avec $\Delta > 0$, dextrorsum correspond au contraire à l'orientation est-sud-zénith et les tangentes aux deux indicatrices sphériques sont de sens contraires. Mais si, dans ce dernier cas, on convient de prendre pour binormale l'autre direction de la perpendiculaire au plan tMN, le trièdre sera de nouveau orienté ouest-sud-zénith et les tangentes aux deux indicatrices seront de nouveau parallèles et de même sens. On voit donc que si, au lieu d'orienter MtNB comme Oxyz, on convient de le construire de manière que les tangentes aux deux indicatrices sphériques soient de même sens, dextrorsum (usage de la Botanique) correspondra toujours à l'orientation est-sud-zénith.

Ce système, qui peut être avantageux dans certains cas, par exemple pour l'hélice circulaire qui garde même allure dans toute sa longueur, ne sera sans doute pas préféré en général pour une courbe unicursale pour laquelle T lui-même étant rationnel, il est commode de se rendre compte des changements d'allure par les changements de signe de T à mesure que le paramètre varie.

Ceci me paraît vrai *a fortiori* du système imaginé par M. R. v. Lilienthal (*Note zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene. Math. Annalen*, t. XLII, p. 497) et appliqué par lui aux directions principales d'une courbe et aux rayons de courbure et de torsion ; système qui consiste à déterminer sans ambiguïté comme grandeur algébrique la distance de deux points quelconques et la distance d'un point à un plan, en prenant pour règle invariable que la direction positive d'une droite à partir d'un point de cette droite est, si la droite n'est pas perpendiculaire à Oz, celle qui fait un angle aigu avec Oz; si la droite est

perpendiculaire à Oz mais non perpendiculaire à Oy, celle qui fait un angle aigu avec Oy et si la droite est parallèle à Ox, celle qui coïncide avec la direction positive à Ox. Dans ce système, il pourra y avoir des signes à changer dans les formules toutes les fois que l'un des axes du trièdre $MtNB$ passera par une position perpendiculaire à Oz. Il est donc probable que l'on continuera généralement, au moins dans l'étude des courbes à représentation paramétrique rationnelle, à supposer $MtNB$ orienté comme $Oxyz$ et à considérer T comme une quantité algébrique.

Reste alors à choisir entre les huit systèmes indiqués plus haut, dont cinq ont été adoptés par des auteurs. Ce choix importe en somme assez peu et l'expérience montre que là où nul intérêt essentiel n'est en jeu, l'habitude a plus de force que les raisons les plus spécieuses. Sans sortir de la question qui nous occupe, nous en avons une preuve dans l'histoire des noms *binormale* et *torsion*. De Saint-Venant, dans son Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique* (30e cahier, 1845) introduit le premier de ces noms pour désigner la perpendiculaire au plan osculateur, simplement *parce qu'on ne lui a pas encore donné de nom et qu'elle est normale à deux éléments consécutifs à la fois*. Cette dénomination a été universellement adoptée, et Français, Allemands, Italiens et Anglais lui en font honneur. A la fin de ce même Mémoire, de Saint-Venant consacre une note de plus de dix pages à montrer combien les noms de torsion, seconde courbure ou flexion sont inopportuns et, par des raisons qui semblent convaincantes, il montre que *cambrure* serait préférable. Néanmoins, torsion est resté en usage et je n'ai rencontré *cambrure* que dans le *Cours de calcul différentiel et intégral* de M. Haag

(1893, p. 237) qui, d'ailleurs, ne nomme point de Saint-Venant. Je n'ai pour mon compte aucune raison convaincante à offrir sur la question actuelle, mais seulement quelques remarques.

Je ne vois pas que l'un des deux usages, celui de la Physique ou celui de la Botanique, soit plus fondé que l'autre sur la nature des choses ; par suite, il me paraîtrait avantageux d'attacher, ainsi que fait M. Königs (*Cinématique*, p. 104), les mots *dextrorsum* et *sinistrorsum* aux mots positif et négatif ; de sorte que, un mouvement hélicoïdal résultant d'une translation le long d'un axe et d'une rotation autour de cet axe et la rotation étant supposée positive, ce mouvement serait *dextrorsum* ou *sinistrorsum* suivant que la translation serait positive ou négative. Dans ce système, le choix de l'usage serait corrélatif du choix de l'orientation ; si l'on oriente le trièdre est-sud-zénith, on prendra l'usage de la Botanique, si l'on oriente ouest-sud-zénith, on prendra l'usage de la Physique. Les systèmes I′, II, III′, IV seront ainsi éliminés.

En France, en dehors de l'Astronomie, l'orientation est-sud-zénith est de beaucoup la plus usuelle ; il n'y aura donc plus à choisir qu'entre les systèmes I et III.

D'après M. Darboux [1] le système I serait préférable : d'abord il fait correspondre dextrorsum à $T > 0$, ensuite il considère $d\tau$ comme une rotation autour de la tangente, ce qui me paraît plus naturel. La manière de voir, qui en fait une translation parallèle à la normale principale, repose sur l'introduction de l'indicatrice sphérique qui, si ingénieuse et si utile qu'elle soit, a quelque chose d'un peu artificiel.

---

[1] *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 428, note.

[D6cα]

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'UNE SÉRIE SUR SON CERCLE DE CONVERGENCE;

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

L'étude d'une série de puissances entières de la variable complexe, sur le cercle de convergence, supposé non nul ni infini, est un problème d'une grande difficulté.

Nous nous proposons, ici, de faire cette étude, d'une manière très simple, pour deux cas classiques ; la méthode s'étendrait probablement à quelques autres cas.

1. *Étude de* L $(1-z)$, (L désigne le logarithme). — Nous établirons, très simplement, que la série converge en tous les points du cercle de convergence, sauf au point *un*.

Soit un contour, à l'intérieur duquel la fonction f_z est synectique, le bord étant compris, on a, d'après Cauchy,

$$2i\pi f(u) = \int_C \frac{f_z\,dz}{z-u},$$

u étant intérieur au contour C ; on en déduit, de suite, le point *zéro* étant aussi intérieur au contour C :

$$2i\pi f_u = 2i\pi\left(f_0 + \frac{u}{1}f_0^1 + \frac{u^2}{\lfloor 2}f_0^2 + \ldots + \frac{u^p}{\lfloor p}f_0^p\right) - \varrho_p,$$

$$\varrho_p = \int_C \frac{u^{p+1}f_z\,dz}{z^{p+1}(z-u)} \qquad (f_z^p \text{ désigne la } \textit{dérivée} \text{ d'ordre } p).$$

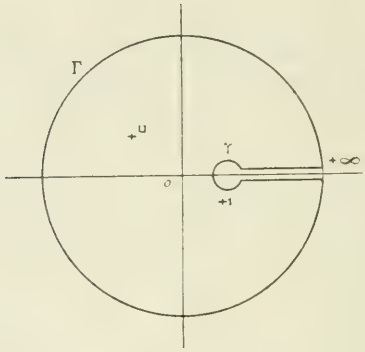
Étudions ce *reste*, avec le contour suivant :

Supposons la partie réelle de u *inférieure ou égale* à *un*, nous prenons pour contour :

1° Un cercle de centre O et de rayon R, que nous ferons croître indéfiniment plus tard ;

2° Un cercle de centre 1 et de rayon r, qui tendra vers *zéro* ;

3° Une coupure suivant l'axe réel de $+1$ à $+\infty$:



Le *reste* contient donc trois termes ; on voit immédiatement que les deux premiers tendent vers *zéro* avec r et $\frac{1}{R}$.

En effet, pour $|z| = R$, le module de l'intégrale ρ_p est de l'ordre de $\frac{LR}{R^{p+1}}$.

Ceci tend vers *zéro* avec $\frac{1}{R}$.

Pour $|z - 1| = r$, le module de l'intégrale ρ_p est de l'ordre de $r L r$, ce qui tend vers *zéro* avec r.

Il reste à étudier l'intégrale le long de la coupure.

Sur *un* bord, le logarithme est le logarithme ordinaire, réel, que nous représentons par $L_0(x - 1)$; sur *l'autre* bord, le logarithme est $L_0(x - 1) + 2i\pi$, si le petit cercle a été parcouru dans le sens *positif*.

Donc, en somme, ρ_p se réduit à :

$$2i\pi u^{p+1}\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+1}(x-u)},$$

d'où

$$f_u = f_0 + \frac{u}{1}f_0^1 + \frac{u^2}{\underline{|2}}f_0^2 + \ldots + \frac{u^p}{\underline{|p}}f_0^p + \rho'_p,$$

$$\rho'_p = u^{p+1}\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+1}(x-u)}.$$

On a, d'ailleurs, x étant sur la coupure

$$|x-u| = |1-u|,$$

$$|\rho'_p| = \left|\frac{u^{p+1}}{1-u}\right|\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p+1}}.$$

Nous avons enfin

$$L(1-u) = -\left(\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^p}{p}\right)+\rho'_p$$

avec l'inégalité

$$|\rho'_p| < \frac{1}{p}\left|\frac{u^{p+1}}{1-u}\right|.$$

Prenons, sur le cercle de convergence, le cercle de rayon un, un point u autre que le point $+1$.

On a

$$|u| = 1,$$

donc, le reste devient nul, si p devient infini. Mais si le point u, pris sur le cercle, tend vers le point un, il est clair que le reste, pour p infini, n'est pas nul.

C. Q. F. D.

2. *Étude de* $(1-z)^m$, (m est réel).

Le point critique est le même, nous avons donc exactement le même contour d'intégration.

D'ailleurs, tandis qu'une circulation autour du point un, dans le sens positif, augmentait le logarithme de

$2i\pi$, ici la même circulation multiplie la fonction par $e^{2i\pi m}$. Étudions le reste :

$$\int_C \frac{u^{p+1}}{z^{p+1}} \frac{(1-z)^m\,dz}{z-u}.$$

La discussion est un peu plus délicate.

Étudions d'abord l'intégrale sur le grand cercle : en prenant p assez grand, il est clair qu'elle devient nulle avec $\frac{1}{R}$.

Considérons le petit cercle : posons

$$|z-1| = r,$$

r étant très petit. Le module a une expression de la forme

$$\left|\frac{u^{p+1}}{1-u}\right| r^{m+1} \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Le point u étant différent du point un, ceci nous donne, lorsque r tend vers zéro :

pour $m+1>0$, zéro,

pour $m+1=0$, un nombre fini,

pour $m+1<0$, l'infini.

Considérons enfin l'intégrale suivant les deux bords de la coupure : nous avons un facteur $e^{2m\pi i}-1$, nul pour m entier, puis une intégrale réelle de la forme :

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{(x-1)^m}{x^{p+1}}\,dx.$$

1° Supposons m positif, on a une expression de la forme

$$\int_{+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p+1-m}} = \frac{1}{p-m},$$

p devenant *infini*, cela tend vers *zéro*.

2° Supposons

$$0 > m > -1.$$

Le point *un* est un point singulier pour la fonction sous le signe, mais l'intégrale reste déterminée et finie.

Prenons-la sous la forme

$$\int_{+1}^{+2} + \int_{+2}^{+\infty}$$

et soit $m = -q$; on aura, en posant $y = (x-1)^{1-q}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^q x^{p+1}} = \frac{1}{1-q} \int_0^1 \frac{dy}{\left(1 + y^{\frac{1}{1-q}}\right)^{p+1}}.$$

Donc cette intégrale tend vers *zéro* avec $\frac{1}{p}$.

D'ailleurs nous avons, pour $x > 2$,

$$(x-1)^q > 1,$$

d'où

$$\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^q x^{p+1}} < \int_2^\infty \frac{dx}{x^{p+1}} = \frac{1}{p} \frac{1}{2^p}.$$

Donc, enfin, notre intégrale tend vers *zéro* quand p devient *infini*.

3° Supposons

$$-1 \leqq m.$$

Alors l'intégrale, quel que soit p, est *infinie*.

En résumé, le long de la coupure, nous avons, pour $m > -1$, et en majorant le module, une expression de la forme

$$B_p \left| \frac{u^{p+1}}{1-u} \right|,$$

B_p tendant vers *zéro* pour p *infini*.

Au contraire, pour $m \leqq -1$, nous aurions un terme *infini*.

Le seul point du cercle de convergence, pour lequel cette méthode ne donne aucun résultat est le point *un*, à cause de la présence, au dénominateur, du facteur $|1 - u|$.

Mais, en ce point, nous avons à étudier une série *réelle*; l'étude est faite depuis longtemps par les critères classiques et on a ce résultat:

m positif, série réelle convergente au point *un*,
m négatif, série réelle divergente au point *un*.

Ce qui précède donne, d'ailleurs, immédiatement les résultats suivants :

$m > -1$, série convergente certainement en tout point du cercle de convergence (sauf, peut-être, au point *un*).

$m < -1$, série divergente sur tout le cercle (sauf, peut-être, au point *un*).

Donc, en admettant les résultats relatifs à la série réelle, et en considérant seulement le cas où m est réel (le seul que l'on rencontre pratiquement), nous avons obtenu facilement le théorème connu :

$m > 0$, série convergente en *tous les points* du cercle de convergence.

$m \leqq -1$, série divergente en *tous les points* du cercle.

$0 > m > -1$, série convergente en *tous les points* du cercle de convergence, *sauf* au point *un*.

[O4h]

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. V. JAMET.

Voici une nouvelle solution du problème résolu par M. Villat, dans le numéro de mars : *Exprimer les coordonnées d'un point, mobile sur une surface réglée, en fonction des paramètres de ses lignes asymptotiques.*

Soit S une telle ligne asymptotique. Par chacun de ses points passe une génératrice, contenue dans le plan osculateur de S; et l'on peut supposer celle-ci parcourue par un point mobile, de telle sorte que le vecteur accélération soit sans cesse dirigé suivant cette génératrice. Cette remarque suffit pour suppléer à un calcul un peu fastidieux, qui permet d'écrire les équations représentatives de la surface sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \dfrac{d^2 x_0}{dt^2}, \\ y = y_0 + \lambda \dfrac{d^2 y_0}{dt^2}, \\ z = z_0 + \lambda \dfrac{d^2 z_0}{dt^2}. \end{cases}$$

L'intégration de l'équation différentielle des lignes asymptotiques nous permettra d'exprimer λ, et par conséquent x, y, z, en fonction de t et d'une constante arbitraire c, qui sera le paramètre des lignes asymptotiques autres que les génératrices, celles-ci ayant pour paramètre t. Cette équation différentielle est, comme pour toute surface réglée, une équation de Ricati. Mais ici nous en connaissons d'avance la solution

$\lambda = 0$, ce qui nous permettra de pousser son intégration jusqu'aux quadratures. Cette équation a pour premier membre un déterminant dont je n'écrirai qu'une seule rangée verticale; le lecteur voudra bien former les deux autres en remplaçant la lettre x, successivement, par y et par z. Voici cette équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \lambda \frac{d^4 x_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 x_0}{dt^3} + \frac{d^2 x_0}{dt^2} \frac{d\lambda}{dt} & \cdots \\ \frac{dx_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 x_0}{dt^3} + \frac{d^2 x_0}{dt^2} \frac{d\lambda}{dt} & \cdots \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Après quelques transformations intuitives, elle devient

$$\begin{vmatrix} \lambda \frac{d^4 x_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \lambda \frac{d^4 y_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \lambda \frac{d^4 z_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{dx_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \frac{dy_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \frac{dz_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 x_0}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Soient

$$T = \begin{vmatrix} \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix}, \qquad U = \begin{vmatrix} \frac{d^4 x_0}{dt^4} & \frac{d^4 y_0}{dt^4} & \frac{d^4 z_0}{dt^4} \\ \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix}.$$

On observe que

$$\frac{dT}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{d^4 x_0}{dt^4} & \frac{d^4 y_0}{dt^4} & \frac{d^4 z_0}{dt^4} \\ \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix},$$

et l'on écrit l'équation différentielle ci-dessus sous la forme

$$2T\frac{d\lambda}{dt} + T'\lambda + U\lambda^2 = 0,$$

puis on la transforme comme il suit :

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{T'}{2T^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\lambda} + \frac{U}{2T^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou bien

$$-D_t\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{T}}\right) + \frac{U}{2T^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

et l'on en déduit, en intégrant,

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{T}} = \int\frac{U\,dt}{2T^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{T}\displaystyle\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}}.$$

L'intégrale qui figure dans cette équation contient le paramètre φ comme terme additionnel.

Les formules (1) deviennent

$$x = x_0 + 2\frac{\dfrac{d^2x_0}{dt^2}}{\sqrt{T}\displaystyle\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

$$y = y_0 + 2\frac{\dfrac{d^2y_0}{dt^2}}{\sqrt{T}\displaystyle\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

$$z = z_0 + 2\frac{\dfrac{d^2z_0}{dt^2}}{\sqrt{T}\displaystyle\int\frac{U\,dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

et le problème est ainsi résolu.

[O4h]

SUR LES SURFACES DE JAMET RÉGLÉES;

PAR M. R. BRICARD.

Cette Note a été écrite pour répondre à une question posée dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens* par M. O. Degel (1910, p. 3, Question 3648), et qui peut s'énoncer ainsi : *Quelles sont les surfaces de Jamet qui sont en même temps réglées ?* On sait qu'on appelle *surfaces de Jamet* celles qui satisfont à la condition suivante : les courbes de contact des cylindres circonscrits qui ont leurs génératrices parallèles à un certain plan fixe sont dans des plans formant un faisceau.

M. Raffy, dont tous les géomètres déplorent la perte récente, a montré, dans une de ses dernières communications à la *Société mathématique de France*, qu'on peut résoudre le problème en utilisant l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. Ses résultats sont en parfait accord avec ceux que m'a fournis la méthode exposée ci-dessous : en ayant égard au théorème classique de Chasles sur la loi de variation du plan tangent à une surface réglée le long d'une génératrice, on se trouve en présence d'un système extrêmement simple d'équations différentielles du premier ordre, et la question se résout avec très peu de calculs.

Soit M un point d'une surface satisfaisante (S). D'après les conditions énoncées, quand M varie dans un plan passant par une droite fixe, qu'on peut prendre

pour axe des z, la trace du plan tangent en M sur un plan fixe, qu'on peut prendre pour plan des xy, doit rester parallèle à une certaine droite.

Appelons t et T les coefficients angulaires respectifs de la trace du plan (MOz) et du plan tangent à (S) en M sur le plan des xy. Il résulte des conditions de l'énoncé qu'on a entre t et T une relation

$$(1) \qquad f(t, T) = 0,$$

valable quelle que soit la position du point M sur (S).

Il est facile de reconnaître *a priori* quelle est la forme de cette relation. A cet effet, faisons varier le point M sur une génératrice G de (S). D'après le théorème classique de Chasles, la ponctuelle engendrée par M et le faisceau engendré par les traces des plans tangents correspondants sont homographiques. Cela revient évidemment à dire que la relation (1) est homographique.

Cela posé, écrivons les équations d'une génératrice de la surface

$$(2) \qquad \begin{cases} x = mz + n, \\ y = pz + q, \end{cases}$$

où les coefficients m, n, p, q sont fonctions d'une variable; pour simplifier les calculs, nous pouvons supposer que cette dernière est m ou p (ces deux coefficients ne sont en effet pas constants tous les deux, autrement on aurait affaire à un cylindre et nous écartons cette hypothèse sans intérêt). Prenons par exemple le coefficient m comme variable indépendante.

L'équation du plan tangent en M est

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ z + n' & p'z + q' & 0 \\ m & p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à m. On a alors, avec les notations indiquées plus haut,

$$T = \frac{p'z + q'}{z + n'}$$

ou

$$(3) \qquad Tz - p'z + n'T - q' = 0,$$

et

$$t = \frac{pz + q}{mz + n}$$

ou

$$mtz - pz + nt - q = 0.$$

Par élimination de z entre les équations (3) et (4), on obtiendra entre t et T une relation. En écrivant que cette relation est homographique, on formera un système d'équations différentielles qui définira les coefficients n, p, q en fonction de m.

Le calcul se simplifie notablement si l'on prend la relation homographique sous une forme réduite. Mais il faut distinguer deux cas, suivant que la relation homographique a ses valeurs doubles distinctes ou confondues. Nous allons les examiner successivement.

1° *Les valeurs doubles sont distinctes.* — On peut alors supposer les axes Ox et Oy tellement choisis que ces valeurs doubles soient zéro et l'infini, et la relation homographique se réduit à

$$T = kt.$$

k étant une constante.

Remplaçons alors T par kt dans la relation (3), il vient

$$ktz - p'z + kn't - q' = 0,$$

et il faut écrire que cette relation est identique à la

relation (4). On obtient ainsi

$$\frac{k}{m} = \frac{p'}{p} = \frac{kn'}{n} = \frac{q'}{q}.$$

Ce système s'intègre sans aucune difficulté. On trouve d'abord

$$n = cm,$$

c étant une constante. La première des équations (2) devient alors

$$x = m(z + c),$$

et il est clair que par un déplacement convenable de l'origine, on peut annuler le coefficient c. Soit donc

$$n = 0.$$

On trouve ensuite

$$p = am^k, \qquad q = bm^k,$$

a et b étant de nouvelles constantes. Les équations (2) s'écrivent alors

$$x = mz,$$
$$y = m^k(az + b),$$

et l'élimination de m donne l'équation de la surface (S) sous la forme

$$y = (az + b)\left(\frac{x}{z}\right)^k.$$

Comme les plans

$$y = 0, \qquad az + b = 0, \qquad x = 0, \qquad z = 0$$

forment un véritable tétraèdre (ayant une arête rejetée à l'infini), la surface (S) fait partie de celles qui sont définies en coordonnées tétraédriques par l'équation

$$(5) \qquad \frac{X}{Y} = \left(\frac{Z}{T}\right)^k.$$

On énonce immédiatement la propriété caractéris-

tique de ces surfaces : *les sections par des plans contenant l'arête* $X = 0$, $Z = 0$, *du tétraèdre de référence sont les courbes de contact de cônes circonscrits ayant leurs sommets sur l'arête* $Y = 0$, $T = 0$.

Remarquons encore que l'équation (5) ne change pas si l'on y permute X et Y, Z et T. Il en résulte que les deux arêtes $X = 0$, $Z = 0$, $Y = 0$, $T = 0$ jouissent de propriétés réciproques. Le fait était à peu près évident *a priori*. Désignons en effet par D et Δ les deux arêtes en question. Nous savons déjà que les sections de la surface par des plans qui contiennent D sont les courbes de contact de cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Δ. Il s'ensuit, d'après le théorème de Dupin, que si une tangente à (S) rencontre D, la tangente conjuguée rencontre Δ. L'énoncé de cette propriété étant symétrique par rapport à D et Δ, la réciprocité de ces deux droites est bien mise en évidence.

2° *Les valeurs doubles sont confondues.* — On peut supposer les axes tellement choisis que la valeur double unique soit égale à l'infini. La forme de la relation est alors

$$T - t - k = 0,$$

k étant une constante.

Les relations à identifier sont alors

$$(t + k)z - pz + n'(t - k) - q' = 0,$$
$$mtz - pz + nt - q = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{m} = \frac{p' - k}{p} = \frac{n'}{n} = \frac{q' - kn'}{q}.$$

On pourra faire, comme dans le premier cas,

$$n = 0.$$

On trouve ensuite

$$p = am - km\,\mathrm{L}m,$$
$$q = bm,$$

a et b étant de nouvelles constantes. On a donc, pour équations de la génératrice,

$$x = mz,$$
$$y = m(a - k\,\mathrm{L}m)z + bm.$$

Pour éliminer m, nous tirons de la seconde équation

$$\mathrm{L}m = \frac{y - amz - bm}{kmz} = \frac{y - ax - \frac{bx}{z}}{kx},$$

d'où

$$m = \frac{x}{z} = e^{\frac{y - ax - \frac{bx}{z}}{kx}}$$

ou, en introduisant de nouvelles constantes,

$$x = \mathrm{A}\,z\,e^{\frac{ax}{k} + \frac{b}{kz}}.$$

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Exposer une méthode de recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Application à l'équation

$$p^2 y - z = 0.$$

II. *On considère les surfaces développables dont les génératrices font un angle donné* α *avec l'axe des* z *et qui passent par la parabole*

$$y^2 - 2px = 0, \qquad z = 0$$

(*en coordonnées rectangulaires*).

Montrer que ces surfaces sont des cylindres à l'exception d'une certaine surface développable S (*composée de deux nappes distinctes se croisant suivant la parabole*).

Faire voir que S *est l'enveloppe des cylindres et rechercher géométriquement les projections sur le plan des* xy *des lignes de courbure de* S.

Épreuve pratique. — *On considère le volume compris entre les deux plans* $z = 0$, $z = 6$ *et la surface ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{z(6-z)}}.$$

Ce volume a une mesure finie (*dire pourquoi*).

On demande de déterminer un plan P *parallèle au plan des* xy *et tel que le rapport de la portion du volume précédent comprise entre le plan* P *et le plan* $z = 6$ *à celle comprise entre le plan* P *et le plan* $z = 6$ *soit égale à* 0,3656. (Novembre 1909.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Équations différentielles du premier ordre non résolues par rapport à la dérivée. Cas particuliers : x ou y ne figurent pas dans l'équation. Équations de Lagrange et de Clairaut.*

II. *Déterminer les surfaces telles que, si de l'origine on abaisse la perpendiculaire* OP *sur le plan tangent en* M,

le produit de OP *par la portion* MN *de normale comprise entre le point* M *et le plan* xOy *soit égal au carré de la distance* OM.

Étudier les sections de ces surfaces par les plans passant par Oz *et déterminer les fonctions arbitraires de façon que ces sections forment une famille de lignes de courbure.*

Épreuve pratique. — *Décomposer en éléments simples*

$$\frac{x^2 + px + q}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Déterminer p *et* q *de façon que la fonction primitive de cette fraction rationnelle soit algébrique.*

Calculer

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx.$$

(Juillet 1909.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée.*

Former, en général, l'équation différentielle à laquelle elles satisfont.

Former, en particulier, cette équation dans le cas d'une hyperboloïde à une nappe.

Intégrer quand l'hyperboloïde est de révolution.

SOLUTION.

En représentant l'hyperboloïde par les équations paramétriques

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin t + \cos t,$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos t - \sin t.$$

on trouve, pour l'équation différentielle demandée,

$$\frac{dz}{dt} + \frac{(a^2 - b^2)\sin t\cos t}{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2 - c^2}\, z$$
$$\frac{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2 - c^2}\, c = 0,$$

qu'il est facile d'étudier.

Épreuve pratique. — *Étant donné le contour mixte formé par l'axe des x et une demi-circonférence ayant pour centre l'origine, pour rayon une longueur supérieure à l'unité, et située dans la partie des y positifs du plan des z, intégrer le long de ce contour parcouru dans le sens positif la différentielle*

$$\frac{z^2\, dz}{z^4 - z^2 - 1}.$$

Déterminer la limite de la partie de l'intégrale qui correspond à la demi-circonférence lorsque le rayon de celle-ci augmente indéfiniment.

Enfin, calculer, à 0,001 *près, la valeur numérique de l'intégrale définie réelle*

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

SOLUTION.

$$\frac{1}{6}\pi\sqrt{3} = 0,906.$$

(Juin 1909.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Une surface étant rapportée à trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, soient* M *un point de la surface,* P *le point où le plan tangent en* M *coupe* Oz, L *la trace de la droite* MP *sur le plan* xOy.

1° *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles*

des surfaces S *telles que le point* Q *ait une abscisse donnée* a. *Démontrer que les surfaces* S *sont des surfaces réglées.*

2° *Soit* Σ *celle de ces surfaces qui contient le cercle*

$$z = a, \qquad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Déterminer les projections sur le plan xOy *des lignes asymptotiques de la surface* Σ. *Indiquer la forme de ces projections.*

3° *Soit* Σ_1 *celle des surfaces* S *qui contient la droite*

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y + z = 0.$$

La surface Σ_1 *est du second degré, et l'un de ses systèmes de génératrices rectilignes est formé de droites rencontrant* Oz : *on considère les trajectoires orthogonales des génératrices de ce système et l'on demande l'équation générale de la projection de ces trajectoires sur le plan* xOy.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2\left(\frac{dy}{dx} + y^2\right) = a(xy - 1),$$

Cas particulier où $a = 1$.

(Juillet 1909.)

Épreuve théorique. — *Soit* M *un point d'une surface rapportée à trois axes rectangulaires* $Oxyz$.

1° *Trouver et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *telles que l'angle formé par la droite* OM *et par la normale en* M *à la surface se projette sur le plan* xOy *suivant un angle droit;*

2° *Déterminer les lignes asymptotiques des surfaces* S;

3° *Soient* A *une aire quelconque prise sur la surface* S, V *le volume limité par* A, *par sa projection sur le plan* xOy, *et par le cylindre projetant* (*on suppose ce volume tout entier d'un même côté du plan* xOy). *Soit* V' *le volume*

limité par A *et par le cône ayant pour sommet l'origine et pour base l'aire* A. *Démontrer que l'on a*

$$V = 3V';$$

4° *Déterminer celle des surfaces* S *qui contient la courbe*

$$x = a, \qquad y = ae^{\frac{z}{a}}$$

et calculer le volume V, *en supposant que* A *soit l'aire de cette surface qui se projette sur le plan* xOy *à l'intérieur du triangle limité par les droites*

$$x = 0, \qquad y = a, \qquad y = x.$$

Épreuve pratique. — *Soient* x, y, z *les coordonnées d'un point* M *de l'espace. On suppose que* x, y, z *soient des fonctions d'une variable* t *définies par le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \qquad \frac{dy}{dt} = z - x, \qquad \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Déterminer ces trois fonctions de façon que, pour $t = 0$, *elles se réduisent à* $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; α, β, γ *étant trois constantes données.*

Démontrer que la courbe décrite par M, *lorsque* t *varie, est une courbe plane et que, lorsque* α, β, γ *varient, le plan de cette courbe passe par une droite fixe.*

(Novembre 1909.)

Nancy.

Épreuve théorique. — I. *Développement en série de Taylor d'une fonction analytique d'une variable complexe.*

II. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère toutes les sphères tangentes au plan des* xz *aux différents points de* Oz.

1° *Montrer que ces sphères satisfont toutes à une même*

équation aux dérivées partielles du premier ordre (E) *et former cette équation;*

2° *Indiquer la génération de la surface intégrale la plus générale de l'équation* (E), *ainsi que les caractéristiques de cette équation;*

3° *Déterminer la surface intégrale de* (E) *qui passe par la courbe*

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 - 2y = 0;$$

4° *Démontrer que la section par un plan quelconque passant par* Oz *de toute surface intégrale de* (E) *est une ligne de courbure de cette surface. Quelles sont les autres lignes de courbure?* (Juin 1909.)

Épreuve théorique. — I. *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ *désigne une fonction des deux variables complexes* x *et* y, *holomorphe au voisinage du système de valeurs* (x_0, y_0). *Énoncer et démontrer le théorème relatif à l'existence des intégrales* y *qui prennent la valeur* y_0 *pour* $x = x_0$.

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$y\frac{\partial x}{\partial z} - x\frac{\partial y}{\partial z} - a = 0,$$

a *désignant une constante donnée.*

1° *Intégrer cette équation;*

2° *La surface intégrale étant supposée rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, déterminer la fonction arbitraire qui entre dans son équation de manière que cette surface admette pour ligne de courbure sa section par le plan des* yz.

Déterminer dans ce cas les deux familles de lignes de courbure, ainsi que les deux rayons de courbure principaux.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

soit par la méthode de Laplace, soit en se servant de la propriété de l'équation (propriété qu'on démontrera) d'entrainer comme conséquence une certaine équation différentielle linéaire du sixième ordre à coefficients constants. (Octobre 1909.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — 1° *On considère la surface* (S) *enveloppe des sphères* (Σ) *données par l'équation*

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0,$$

dans laquelle α, β, γ *sont des fonctions données d'un paramètre.*

Démontrer que toutes les normales de (S) *rencontrent une courbe* (C), *que la surface* (S) *admet une famille de circonférences* (Γ) *pour l'un des systèmes de ses lignes de courbure et que les plans tangents à* (S) *le long d'une quelconque des circonférences* (Γ) *enveloppent un cône de révolution* (R).

2° *Quelles doivent être les fonctions* α, β, γ *pour que toutes les circonférences* (Γ) *soient égales? Que sont alors les cônes* (R)? *Montrer que les normales de* (S) *sont aussi des normales de* (C) *et en déduire le second système de lignes de courbure de cette surface* (S).

3° *Quelles doivent être les fonctions* α, β, γ *pour que tous les cônes* (R) *soient égaux? Montrer que la recherche du second système de lignes de courbure de* (R) *revient alors à la recherche de familles de droites coupant* (C) *sous un angle constant et ayant une enveloppe.*

On donne la fonction $f(z)$ *définie par l'expression*

$$f(z) = \int_0^z \left(\int_0^\xi \frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{(1-x)^2} \right) d\xi,$$

dans laquelle :

a. l'intégrale $\int_0^z$ *est prise suivant un chemin donné* (Γ) *de sorte que* ξ *est un point variable sur* (Γ);

b. l'intégrale $\int_0^\xi$ *est prise suivant la portion* $(0, \xi)$ *de* Γ.

Quand (Γ) *varie, quelles sont les différentes valeurs de* $f(z)$? *En quoi le résultat serait-il modifié si l'on abandonnait l'hypothèse b?*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$p^2 + q^2 = z^2.$$

Développer la fonction $\mathcal{L}2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$ *en série de Fourier procédant suivant les sinus et cosinus des multiples entiers de* φ. (Juillet 1909.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *On donne l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' + Ay' + By = 0:$$

1° *Vérifier que la transformée de cette équation, définie par la relation*

$$\frac{y'}{y} = z,$$

est l'équation de Riccati

$$z' + z^2 + Az + B = 0:$$

2° *Soient* y_1 *et* y_2 *deux solutions particulières de l'équation* (1), *on pose*

$$u = \frac{y_2}{y_1} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{u''}{u};$$

montrer qu'on a

$$v = -A - \frac{2y_1'}{y_1}$$

et que v est déterminée par une équation de Riccati ;

3° *A quelles conditions doivent satisfaire les fonctions* A *et* B *pour que l'équation* (1) *admette deux intégrales dont le rapport soit égal à l'une des expressions suivantes :*

$$(\alpha) \qquad u = ax - b,$$

$$(\beta) \qquad u = \operatorname{tang}(ax),$$

$$(\gamma) \qquad u = \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} ax},$$

$$(\delta) \qquad u = \operatorname{Log} x;$$

montrer que, si l'une de ces conditions est remplie, l'intégration de l'équation (1) *dépend d'une seule quadrature. Achever les calculs en supposant :*

A *constant pour les conditions* (α), (β), (γ);

$A = \frac{2m}{x}$ ($2m$ const.) *pour la condition* (δ).

II. *Soit* S *la surface dont l'équation en coordonnées cartésiennes rectangulaires est*

$$z = x^2 y.$$

1° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.*

2° *Soit* L *l'intersection de la surface* S *avec le plan tangent en un point quelconque* M *de* S, *de coordonnées* a, b, c. *Calculer la courbure de* L *en un point quelconque de* L, *en fonction de l'ordonnée* y *de ce point.*

3° *Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface* S *et déterminer les cosinus directeurs des directions principales de* S *en un point quelconque de* Ox.

Épreuve pratique. — 1° *On considère la surface* (Σ) *qui, définie en coordonnées semi-polaires, a pour équation*

$$z = r - a\cos\theta,$$

a *désignant une constante positive, puis le solide* (S) *limité*

par la surface (Σ), *les plans* $z = 0$, $z = a$, *avec la condition*

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Calculer pour le solide (S) :

(α) *L'aire de la section par un plan* $z =$ const.,

(β) *Le volume*,

(γ) *Les coordonnées du centre de gravité.*

2° *Montrer que si l'on pose*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

la fonction

$$z = r - a\cos\theta$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(Juillet 1909.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Deux surfaces* (S) *et* (S_0) *se correspondent point par point de façon que les normales aux points correspondants* (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) *soient parallèles et qu'on ait, entre les différentielles des coordonnées, les relations*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2,$$
$$dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0.$$

1° *Montrer que* z *regardé comme fonction de* x *et* y *vérifie une seule équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on formera et dont on indiquera la signification géométrique.*

2° *Chercher si la surface* (S) *peut être de révolution; trouver sa méridienne. Déterminer la surface* (S_0) *correspondante, en indiquer un mode de génération.*

3° *Montrer que les lignes de courbure de* (S) *corres-*

pondent aux lignes asymptotiques de (S_0) *et réciproquement; trouver ces lignes.*

Épreuve pratique. — *Transformer l'intégrale*

$$J_m = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^m}{(a-x)^{m+1}}\,dx$$

en prenant pour nouvelle variable

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{1-x^2}{a-x};$$

montrer sur la nouvelle forme qu'il existe une relation linéaire entre J_m, J_{m-1}, J_{m-2}.

Calculer explicitement J_3. (Juillet 1908.)

Épreuve théorique. — I. *Une courbe de forme invariable située dans un plan passant par* Oz *tourne autour de cet axe en même temps qu'elle glisse parallèlement à l'axe suivant une loi quelconque; on demande :*

1° *De déterminer sous quelle condition les lignes planes* $x = \text{const.}$ *sont des lignes asymptotiques de la surface engendrée. Quelles sont alors les autres lignes asymptotiques?*

2° *De former dans le cas général en coordonnées rectangulaires* (x, y) *l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des sections de la surface par les plans* $z = \text{const.}$ *Trouver dans quel cas cette équation est homogène et l'intégrer.*

II. *On considère le système d'équations linéaires*

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$

$$\frac{dz}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$

où les coefficients $a_1, \ldots, c_2$ *sont des fonctions de* t.

1° *Trouver à quelles conditions toute solution* (x, y, z) *du système vérifie une relation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$$

2° *Montrer que si l'on suppose*

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

la fonction $\lambda = \dfrac{x+y}{1-z}$ *vérifie une équation de Riccati.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\alpha\, d\alpha}{1 - 2x\cos(\alpha - \beta) + x^2},$$

où l'on suppose x *réel et inférieur à l'unité,* β *désignant une constante arbitraire.*

Nota. — *On formera d'abord le développement de* $\dfrac{1}{1 - 2x\cos(\alpha - \beta) + x^2}$ *en série procédant suivant les puissances croissantes de* x. (Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — I. *On considère les sphères tangentes au plan des* xy *qui ont leurs centres* $m(x, y, z)$ *sur une surface donnée* s : *elles enveloppent une surface* S, *lieu d'un point* M(X, Y, Z).

1° *Calculer les cosinus directeurs de la normale au point* M *à la surface* S, *au moyen de* x, y, z, p, q.

2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$X(x, y, z, p, q) = \text{const.}$$

où le premier membre désigne la coordonnée X *du point* M. (*Intégrale complète, intégrale générale.*)

3° *Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface qui représente l'intégrale générale de cette équation.*

II. *Indiquer la suite des propositions générales sur les fonctions méromorphes doublement périodiques qui amène à la formation de la fonction* pu.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une fonction méromorphe doublement périodique* $\varphi(u)$ *possède dans le parallélogramme des périodes les deux pôles* $u = 0$, $u = b$; *on donne au voisinage de ces pôles les développements*

$$\varphi(u) = \frac{\alpha}{u^2} - \frac{\beta}{u} + A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots,$$

$$\varphi(u) = \frac{\beta}{u - b} + B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \ldots.$$

1° *Exprimer, au moyen de la fonction* ζ, *l'intégrale indéfinie* $\int \varphi(u)\,du$.

2° *Former l'équation algébrique qui lie* $\varphi(u)$ *à sa dérivée première.*

(Juillet 1909.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2100.

(1908, p. 478.)

Si a *et* b *sont les racines de l'équation*

$$x^2 - 7x + 7^3 = 0,$$

les deux quantités

$$-2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}),$$
$$-(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) - (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})$$

sont égales à celles-ci :

$$3(\varepsilon\sqrt[3]{a} + \varepsilon^2\sqrt[3]{b}), \quad 3(\varepsilon^2\sqrt[3]{a} + \varepsilon\sqrt[3]{b}),$$

ε et ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. Préciser ε. G. F.

(D'après HERMITE, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique.*)

SOLUTION,

Par L'AUTEUR.

Les quantités a et b sont des imaginaires conjuguées; $\sqrt[3]{a}$ désigne l'une quelconque des racines cubiques de a, et l'on doit supposer que $\sqrt[3]{b}$ désigne l'imaginaire conjuguée de celle que représente $\sqrt[3]{a}$. En outre, on doit remplacer $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[3]{b^2}$ par $(\sqrt[3]{a})^2$ et $(\sqrt[3]{b})^2$, quantités bien définies par ce qui précède.

Cela posé, désignons les deux quantités considérées par α et β. Il suffit de montrer que $\alpha+\beta$ et $\alpha-2\beta$ ont bien les valeurs qui résultent des indications de l'énoncé, ε étant choisi convenablement. On doit avoir d'abord

$$-(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=(\varepsilon+\varepsilon^2)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}),$$

ce qui est exact.

On doit avoir ensuite

$$(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2=(\varepsilon-2\varepsilon^2)\sqrt[3]{a}+(\varepsilon^2-2\varepsilon)\sqrt[3]{b}$$

ou, en prenant

$$\varepsilon=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2=\sqrt[3]{a}\left(\frac{1-3i\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt[3]{b}\left(\frac{1-3i\sqrt{3}}{2}\right);$$

avec la valeur choisie par ε, on doit prendre

$$\frac{a}{z}=\frac{1-3i\sqrt{3}}{2},\qquad \frac{b}{z}=\frac{1-3i\sqrt{3}}{2},$$

et la relation à vérifier devient

$$(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{b})^2=\sqrt[3]{a}\frac{b}{z}+\sqrt[3]{b}\frac{a}{z}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}{z}\left[(\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{a})^2\right]$$

ou

$$\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = 7;$$

or le produit ab est égal à 7^3, et l'on a supposé que $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$ désignent deux imaginaires conjuguées; donc...

2115.

(1909, p. 56.)

Si l'on définit un tétraèdre SABC *en donnant les faces* λ, μ, ν *du trièdre* S *et les longueurs* α, β, γ *des arêtes issues de* S, *le tétraèdre est orthocentrique sous les deux conditions*

$$\frac{\alpha}{\cos\lambda} = \frac{\beta}{\cos\mu} = \frac{\gamma}{\cos\nu}.$$

Cela étant, dans un tétraèdre orthocentrique ABCD *dont* H *est l'orthocentre, on donne les valeurs algébriques* α, β, γ, δ *des segments* $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$, *le sens positif sur chaque hauteur allant de la base vers le sommet : déterminer la valeur commune des rapports égaux*

$$\frac{\cos(b, c)}{\delta\alpha} = \frac{\cos(c, a)}{\delta\beta} = \frac{\cos(a, b)}{\delta\gamma} = \frac{\cos(d, a)}{\beta\gamma} = \ldots.$$

Nouvelle solution,

Par un Anonyme.

La solution donnée à la page 138 est incomplète, car les seules données du problème sont α, β, γ, δ. Il faut lire d'ailleurs $-\rho^2$ au lieu de ρ^2, $-\mu^2$ au lieu de μ^2, $-(H)$ au lieu de (H) dans les deux dernières formules.

Pour la première partie, AI étant hauteur du triangle ABC et P étant l'orthocentre de ce triangle, de sorte que SP est hauteur du tétraèdre orthocentrique SABC, on a, en traçant SI,

$$\cos\lambda = \cos\left(\widehat{ISB} - \widehat{ISC}\right) = \frac{\overline{IS}^2}{\beta\gamma} + \frac{\overline{IB}.\overline{IC}}{\beta\gamma},$$

$$\beta\gamma\cos\lambda = \overline{PS}^2 + \overline{IP}^2 - IA.IP = \overline{PS}^2 + \overline{IP}.\overline{AP},$$

d'où

$$\beta\gamma\cos\lambda = \gamma\alpha\cos\mu = \alpha\beta\cos\nu = \overline{PS}^2 + \overline{PI}.\overline{PA}.$$

Pour la seconde partie, l'application de la formule précédente au tétraèdre HABC donne

$$-\beta\gamma\cos(b, c) = \overline{PH}^2 - \overline{PH}.\overline{PD} = \overline{PH}.\overline{DH}$$

ou

$$\beta\gamma\cos(b, c) = -\overline{HP}.\overline{HD} = -k.$$

L'équation qui donne k se déduit de la relation entre les cosinus des six dièdres d'un tétraèdre; cette équation est

$$\begin{vmatrix} \frac{-\alpha^2}{k} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-\beta^2}{k} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-\gamma^2}{k} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{-\delta^2}{k} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle a été donnée sous forme simple dans les *Nouvelles Annales* (1909, p. 557), et l'on a montré qu'elle a une racine négative acceptable et trois racines positives dont la plus petite est seule acceptable.

2129.

(1909, p. 191.)

Un point P *décrit une normale à une parabole : de ce point on peut mener deux autres normales à la parabole. Démontrer que la droite qui joint les centres de courbure situés sur ces deux normales enveloppe une parabole quand le point* P *décrit la normale donnée.*

(Georges Cuny.)

Solution.

Par M. R. Bouvaist.

Soient m le coefficient angulaire de la normale fixe décrite par le point P; μ_1 et μ_2 les coefficients augulaires de deux

normales variables issues de ce point, on a

$$m + \mu_1 + \mu_2 = 0.$$

D'autre part, les équations paramétriques de la développée sont, l'origine étant placée au sommet de cette courbe,

$$x = \frac{3p\lambda^2}{2},$$

$$y = p\lambda^3,$$

λ étant le coefficient angulaire d'une normale variable à la parabole.

Soit

$$ux + vy - w = 0$$

une droite quelconque, l'équation aux λ des points d'intersection de cette droite et de la développée est

$$p\lambda^3 v - \frac{3p\lambda^2}{2} u + w = 0;$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée s'obtiendra en écrivant que la somme de deux des racines de cette équation est constante et égale à $-m$, ou encore que l'une des racines est égale à

$$m - \frac{3u}{2v},$$

ce qui donne

$$mp(2mv - 3u)^2 - 4vw = 0,$$

équation tangentielle d'une parabole.

Autres solutions par MM. Barisien, Giraudon, Lez.

QUESTIONS.

2156. — On considère la suite des polynomes en x :

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad \ldots, \quad P_n, \quad \ldots,$$

tels que

$$n P_n = (3n-2) P_{n-1} - (3n-4+x^2) P_{n-2} + (1-x^2)(n-2) P_{n-3}$$

avec

$$P_0 = P_1 = 1,$$

$$P_2 = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1° Montrer que l'on a

$$P_n = a_0 + C_n^1 a_1 x + C_n^2 a_2 x^2 + \ldots + C_n^p a_p x^p + \ldots + C_n^n a_n x^n,$$

C_n^p étant le nombre des combinaisons de n lettres p à p et a_p étant fonction de p seul indépendant de x et n;

2° Montrer qu'il y a une relation linéaire entre a_p, a_{p-1}, a_{p-2} vérifiée quel que soit p. En conclure la valeur de a_p en fonction de p. (R. Gilbert.)

2157. — Démontrer, en partant de l'équation générale d'une quadrique en coordonnées tétraédriques, que le rapport des distances d'un point courant M aux plans tangents en deux points fixes M_1 et M_2 est proportionnel au rapport des distances du plan tangent en M aux deux points fixes M_1 et M_2.

G. F.

2158. — Soient AB une corde d'une hyperbole équilatère de centre O et G le milieu de cette corde; M étant un point de la courbe et P étant la projection de ce point sur la corde AB,

on a

$$\widehat{AB, AM} + \widehat{BA, BM} = -\widehat{OC, OP}.$$

Cas où AB est un diamètre. G. F.

2159. — Démontrer que les foyers de tous les hyperboles équilatérales d'un plan ayant un diamètre commun sont sur une lemniscate. L. Klug.

2160. — Appelons *cercle cylindrique* la courbe intersection d'un cylindre de révolution et d'une sphère ayant son centre sur le cylindre. Le rayon de cette sphère sera dit *rayon du cercle cylindrique.*

Étant donné un cercle cylindrique quelconque, montrer qu'on peut lui inscrire une infinité d'hexagones gauches dont tous les côtés aient pour longueur le rayon du cercle cylindrique. Ce théorème généralise la construction classique de l'hexagone régulier.

Plus généralement encore, étant donnés deux cercles cylindriques égaux tracés sur un même cylindre de révolution, montrer qu'il existe une infinité d'hexagones gauches, dont tous les côtés ont pour longueur le rayon commun des deux cercles cylindriques, et dont les sommets se trouvent alternativement sur ces deux courbes. R. B.

2161. — Une pyramide régulière, de sommet S, a pour base un rectangle ABCD. On considère le paraboloïde de révolution de sommet S qui passe par le cercle circonscrit au rectangle ABCD et le parallélipipède indéfini dont ce rectangle est la section droite. Démontrer que le solide commun à ces deux corps, limité au plan de base de la pyramide, a un volume double de celle-ci. M. d'Ocagne.

[R1a]

SUR UN PROBLÈME DE CINÉMATIQUE NAVALE;

PAR M. J. HADAMARD.

Parmi les problèmes que les marins classent dans la *Cinématique navale* figure celui des *barrages oscillants*, ainsi conçu [1] :

« Des mobiles, de vitesse a constante en grandeur, doués d'un rayon de vision V, ont à couvrir, en oscillant dessus, une ligne droite fixe de longueur l, dite *de barrage*, de manière à empêcher des mobiles B, de vitesse b, de franchir la ligne sans être pris dans une circonférence V, quelle que soit la direction attribuée à b. »

Si cette condition est vérifiée, on dit que la droite de barrage *est gardée*.

On désigne par K le rapport $\frac{a}{b}$ et l'on suppose $K \geqq 1$: autrement dit, les navires barreurs sont au moins aussi rapides que leurs adversaires.

Tout se passe dans un plan : on ne fait intervenir ni vent, ni courant.

On traite habituellement ce problème en assujettissant les mobiles adversaires B à suivre des routes *rectilignes*, leur vitesse étant constante en grandeur et direction et toujours égale à b.

Il est clair cependant que, si les B sont des navires

(1) J'emprunte cet énoncé (en le modifiant conformément à ce qui va être dit), ainsi que les notations, à une brochure de M. le capitaine de vaisseau Vidal (Paris, Challamel, éditeur, 17, rue Jacob, 1909).

ennemis, rien ne les oblige à marcher en ligne droite, ni à donner toujours la vitesse maxima dont ils disposent.

Il est donc logique de supposer :

1° Que les mobiles B peuvent suivre n'importe quelle route droite, brisée ou curviligne;

2° Qu'ils peuvent avoir une vitesse variable, pourvu qu'elle reste *au plus* égale à b; le barrage devant être gardé quelles que soient la forme de la route en question et la loi de variation de vitesse, sous la condition qui vient d'être indiquée.

C'est le problème ainsi posé que je me propose d'étudier. Contrairement à ce qui semblerait au premier abord, il conduit à des résultats plus simples que celui qui correspond à l'hypothèse des routes rectilignes. On peut, en effet, au moins dans les cas que je vais examiner, énoncer des conditions *nécessaires et suffisantes* pour que la garde soit parfaite.

1. J'emploierai un mode de figuration bien connu et qui consiste à représenter d'une manière différente un même point m du plan de la figure, suivant les instants où l'on considère ce point.

A cet effet, on porte verticalement (le plan de la figure primitive étant considéré comme plan horizontal), à partir de m, une cote M mesurée par le nombre t, c'est-à-dire par le même nombre que le *temps*.

Le point M est dit *point complet :* sa connaissance détermine l'ensemble d'un point m du plan horizontal et d'un instant, de sorte qu'un point complet M peut encore se représenter par un symbole de la forme (m, t).

Le mouvement à étudier sera ainsi représenté par une figure dans l'espace à trois dimensions.

La droite de barrage, considérée pour toutes les valeurs réelles de t, donnera, au total, un plan vertical que nous appellerons *plan du tableau* et qui est évidemment un plan de symétrie de la figure.

2. Une oscillation simple d'un seul mobile barreur A_1, effectuée avec la vitesse constante a, sera représentée par un segment de droite de *pente* $\frac{1}{a}$, situé dans le plan du tableau et ayant pour projection horizontale l'amplitude d de l'excursion du mobile.

D'autre part, à chaque instant de son mouvement, notre mobile A_1 est susceptible de voir toute l'étendue d'un cercle de rayon V dont il est le centre.

Lorsqu'il parcourt son segment de droite, le cercle en question, ou, plus exactement, le cercle *complet* qui lui correspond dans l'espace à trois dimensions lorsqu'on tient compte de la valeur de t, engendre un *cylindre circulaire oblique* limité C_1.

Si maintenant, comme cela aura lieu dans tout ce qui va suivre, le mobile A_1 dont il s'agit est supposé osciller indéfiniment $\left(\text{avec la même vitesse constante } \frac{1}{a}\right)$ le long d'un seul et même segment de droite du plan horizontal, on aura une série de cylindres successifs C_1, C'_1, C''_1, ... (*fig.* 1) dont deux consécutifs quelconques seront symétriques l'un de l'autre par rapport à leur plan de base commun.

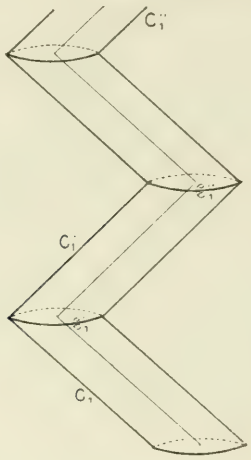
Tous ces cylindres sont tangents aux deux plans Π et Π' qui sont menés parallèlement au plan du Tableau, de part et d'autre de ce plan et à une distance V.

3. Le fait qu'un mobile B n'est vu à aucun moment par A_1 se traduit par cette circonstance que la trajectoire du point complet correspondant n'a de point commun avec aucun des cylindres C_1, C'_1, ...

Le fait que la vitesse de B est au plus égale à b s'exprime en disant que la trajectoire de son point complet a partout une pente d'au moins $\frac{1}{b}$.

Toutes les trajectoires satisfaisant à cette condition

Fig. 1.



et qui passent par un point complet déterminé M sont évidemment intérieures au cône de révolution Γ_M qui a pour sommet ce point, pour axe la verticale correspondante et dont le demi-angle au sommet est arc tang b.

3. Avant de nous demander si un point m du plan horizontal est *gardé*, nous nous poserons la même question pour un point complet M (m, t).

Un tel point sera dit *gardé* s'il est impossible d'y accéder, en partant de la portion de l'espace située au delà de Π (côté par où sont supposés arriver les mobiles B) par un chemin de pente partout au moins égale à $\frac{1}{b}$ sur lequel t soit croissant (de sorte qu'un tel chemin doit être entièrement compris dans la nappe

inférieure du cône Γ_M); ou s'il est impossible d'y accéder à partir de la portion de l'espace située au delà de Π' par un chemin de pente au moins égale à $\frac{1}{b}$ le long duquel t soit décroissant (chemin compris dans la nappe supérieure de Γ_M).

En langage ordinaire, cela signifie qu'un mobile B *ne* peut arriver en *m à l'instant t* (en venant de la région du plan horizontal située au delà de Π) sans avoir été vu; ou que, s'il se trouve en *m* à cet instant *t*, il ne peut, de là, passer dans la région située au delà de Π' sans être vu.

Si c'est la première circonstance qui se produit, on dira que M est gardé *avant;* si c'est la seconde, qu'il est gardé *arrière*.

On peut d'ailleurs se borner à étudier à ce point de vue les points du plan du tableau. Dans ce cas, par raison de symétrie, les plans Π et Π' se comportent de manière parfaitement identique, de sorte qu'on n'a pas à distinguer entre une région de départ et une région d'arrivée.

Nous profiterons de cette remarque pour modifier légèrement la définition donnée plus haut : pour dire qu'un point (complet) M est gardé, nous demanderons qu'on ne puisse y accéder *d'aucune des régions extérieures aux plans* Π, Π' par un chemin de pente au moins égale à $\frac{1}{b}$ sur lequel t soit constamment croissant (garde avant) ou constamment décroissant (garde arrière).

Nous serons sûrs que les résultats ainsi obtenus seront valables pour le problème primitif, pourvu que, en dernière analyse, nous ne les appliquions qu'aux points du plan du tableau.

Enfin, pour qu'un point *m* de la ligne de barrage

soit gardé, il sera évidemment nécessaire et suffisant que toute sa verticale le soit.

4. Cherchons quels seront les points M de l'espace qui seront gardés avant par une oscillation simple déterminée du mobile A_1.

Ces points M seront caractérisés par ce fait que toutes les génératrices de la nappe inférieure du cône Γ_M seront coupées par le cylindre C_1 représentatif de cette oscillation.

Autrement dit, le cône Γ_M (réduit à sa nappe inférieure) et le cylindre (limité) C_1 devront se couper avec *pénétration* (et non avec arrachement).

Il est clair (en vertu de la convexité des corps en présence) que cette condition est nécessaire et suffisante.

La région de l'espace formée des points qui la vérifient est aisée à déterminer. Elle est limitée (*fig.* 2) par des portions des surfaces suivantes :

1° Surface du cylindre (dont le volume est, bien entendu, considéré comme faisant entièrement partie de la région en question);

2° Surfaces latérales limitées des deux cônes de révolution qui ont pour bases respectives les deux bases du cylindre et pour angle au sommet celui des cônes Γ, les sommets S_1, S'_1 étant au-dessus des plans de bases;

3° Plans tangents communs aux deux cônes Γ_{S_1}, $\Gamma_{S'_1}$ et au cylindre, l'arête du dièdre ainsi formé n'étant autre que la droite $S_1 S'_1$.

La figure ainsi délimitée sera dite *solide d'ombre avant*. Elle peut être, en effet, considérée comme tout analogue au *cône d'ombre* qui intervient en Optique et dans la théorie des éclipses, le Soleil étant supposé

à l'infini dans la direction des t négatifs, avec un diamètre apparent égal à l'angle au sommet des cônes Γ.

Les points qui sont gardés arrière par la même

Fig. 2.

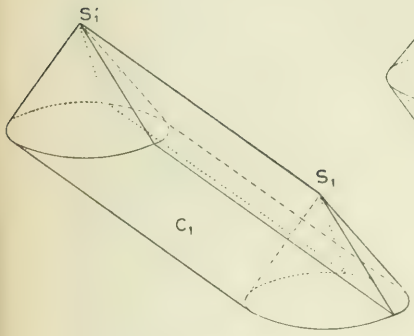
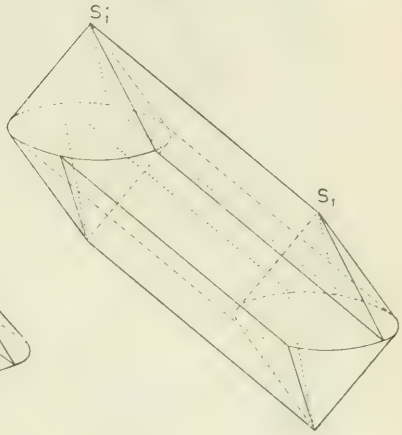


Fig. 3.



oscillation de A_1 forment, de même, le *solide d'ombre arrière*, symétrique du premier par rapport au centre de figure de C_1.

La figure 3 montre l'ensemble du cylindre et de ses deux solides d'ombre. On remarquera que, dans la délimitation de ce solide total, interviennent les quatre plans tangents au cylindre, dont les génératrices de contact divisent ce dernier en quatre parties :

Une bande *supérieure*, celle qui est intérieure au solide d'ombre avant;

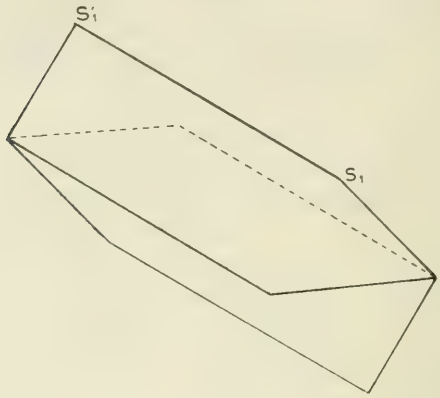
Une bande *inférieure*, intérieure au solide d'ombre arrière;

Deux bandes *latérales*, seules parties du cylindre qui prennent part à la délimitation du solide de la figure 3.

Le solide d'ombre avant a pour section par le plan

du tableau un pentagone; le solide total d'ombre avant

Fig. 4.



et arrière, un hexagone (ces deux polygones sont représentés ensemble sur la figure 4).

4 *bis*. Les points des bandes latérales sont, d'autre part, les seuls points de la surface cylindrique où le plan tangent ait une pente au moins égale à $\frac{1}{b}$. En chacun de ces points, à l'exclusion du reste de la surface, on peut mener à celle-ci deux tangentes de pente $\frac{1}{b}$.

Chaque bande latérale comprend la génératrice de contact du cylindre avec un des plans Π, Π' : elle est divisée par cette génératrice en deux parties, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*.

Soient tracées, en un point de la partie supérieure d'une bande latérale, les deux tangentes de pente $\frac{1}{b}$. Nous noterons que, sur chacune d'elles, le sens *descendant* (c'est-à-dire celui des t décroissants) est aussi celui suivant lequel la distance au plan du tableau,

ou, comme nous dirons encore, l'*éloignement* (en considérant le plan du tableau comme plan vertical de projection), va en croissant [1] en valeur absolue.

Notons enfin que tout point du solide d'ombre (avant ou arrière) extérieur au cylindre, mais compris entre les deux plans de bases, a un éloignement plus petit (en valeur absolue) que celui d'un point quelconque des bandes latérales. Ce fait, aisément reconnaissable à l'inspection des figures 2 et 3, peut être considéré comme une conséquence du précédent : on obtient, en effet, l'un quelconque des points en question situés sur la surface du solide d'ombre en partant d'un point du cylindre situé tout au plus à la frontière des bandes latérales, et suivant une droite de pente $\frac{1}{b}$ dans un sens tel que l'éloignement soit assurément décroissant.

5. Nous pouvons maintenant aborder le premier problème que nous nous proposons d'examiner, savoir :

Quel est, sur la ligne de barrage, le segment gardé par les oscillations d'un seul mobile A_1 ?

Ces oscillations sont supposées, comme précédemment, toutes effectuées suivant un seul même segment $\alpha_1\alpha'_1$ de la ligne de barrage, segment ainsi parcouru alternativement dans un sens et dans l'autre sans interruption.

Un point du plan du tableau ne pourra évidemment, dans ces conditions, être gardé que s'il est projeté horizontalement en un point du segment $\alpha_1\alpha'_1$.

---

[1] Ceci se déduit aisément de la construction qui donne les directions des tangentes en question par l'intersection d'un cône Γ avec un plan parallèle au plan tangent du cylindre.

Le point M du plan du tableau sera, d'autre part, évidemment gardé avant s'il est dans l'ombre avant d'un des cylindres représentatifs des oscillations de A_1.

Si, au contraire, M n'est pas dans l'ombre avant du cylindre *situé immédiatement au-dessous de lui*, et si, par conséquent, il n'est pas gardé avant par ce cylindre, *il est impossible que cette garde avant soit complétée par les cylindres plus éloignés.*

Pour l'établir, il suffira de prouver [1] que, si une génératrice du cône Γ_M ne rencontre pas le premier cylindre C_1^i situé au-dessous de M, elle ne rencontre aucun des cylindres successifs $C_1^{(i-1)}$, $C_1^{(i-2)}$ ..., situés au-dessous du premier.

Or C_1^{i-1} est le symétrique de C_1^i par rapport à un plan horizontal P^i. Soit I le point où la génératrice en question rencontre P^i. Pour que MI prolongé ne rencontre pas C_1^{i-1}, il faut et il suffit que sa symétrique par rapport à P^i (autrement dit, la droite IJ qu'on déduit de MI par réflexion sur $P^{(i)}$) ne rencontre pas $C_1^{(i)}$.

D'autre part, le plan vertical mené par MI coupe $C^{(i)}$ suivant une figure convexe qui, nous le supposons, est sans point commun avec MI et, par conséquent, située tout entière d'un seul et même côté de cette droite, celui où est située la verticale descendante de M. Mais la demi-droite IJ est visiblement située, par rapport à MI, du côté opposé à celui-là : elle ne rencontre donc pas C^i, et MI, prolongé, ne rencontre pas $C_1^{(i-1)}$.

Le même raisonnement permet de déduire de là

---

[1] La démonstration pourrait d'ailleurs également être faite par la voie qui sera employée plus loin (nos 9 et suivants).

que cette droite MI ne rencontre pas $C_1^{i\ 2)}$; et ainsi de suite.

Notre conclusion est, dès lors, démontrée.

Un point M n'est donc gardé avant que s'il est dans l'ombre avant du cylindre inférieur le plus voisin.

Il n'est, de même, gardé arrière que s'il est dans l'ombre arrière du premier cylindre situé au-dessus de lui.

Or, dans notre manière actuelle de poser le problème, si un point complet n'est ni gardé avant, ni gardé arrière, il n'est pas gardé du tout.

Donc, finalement, nous obtiendrons tous les points de l'espace qui sont gardés par les oscillations de A_1 en prenant l'ensemble des ombres avant et arrière des cylindres représentatifs correspondants.

Il nous suffira, d'ailleurs, de considérer les points du plan du tableau : sur celui-ci, comme nous l'avons vu, les ombres totales (avant et arrière) forment une série d'hexagones.

6. En ce qui regarde la disposition mutuelle de ceux-ci, deux cas sont à distinguer :

Ou bien la hauteur des cônes (cône de sommet S_1, par exemple), qui interviennent dans la formation du solide d'ombre, est plus petite que celle du cylindre;

Autrement dit, en langage ordinaire, le temps mis par un mobile B pour parcourir le rayon de vision V est inférieur au temps d'oscillation de A_1;

Ou c'est l'inverse qui a lieu.

Le premier cas est celui que nous appellerons, pour abréger, celui des *oscillations longues;* il est caractérisé par l'inégalité

(1) $KV < d.$

Alors l'intersection des périmètres de deux hexagones consécutifs (ou, ce qui revient au même par raison de symétrie, l'intersection du périmètre d'un hexagone avec un plan de base du cylindre qui lui donne naissance) a lieu, comme l'indique la figure 5,

Fig. 5.

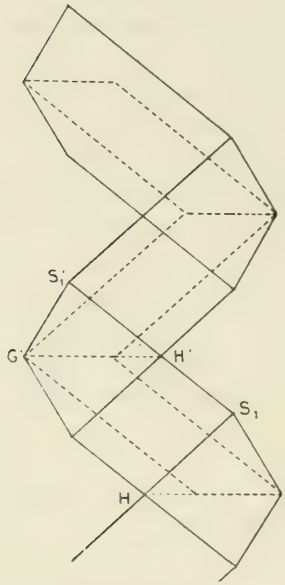
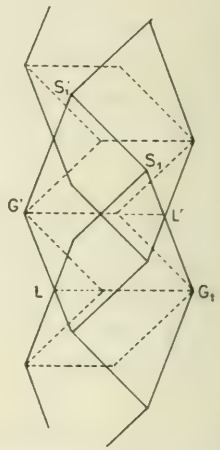


Fig. 5 *bis*.



en un point d'une droite telle que $S_1 S'_1$ (point H′ de la figure 5). Un tel point H′ est séparé du point de la base du cylindre [1] qui en est le plus éloigné (point G′ de la figure 5) par une distance égale à $\sqrt{(1 + K)}$.

Sur l'autre plan de base du même cylindre, le point analogue à H′ sera le symétrique H de H′, par rapport au centre du cylindre.

---

[1] La base à laquelle il est fait allusion ici est celle dont le plan contient H′.

Le segment gardé de la ligne de barrage sera la projection horizontale de HH'.

Les verticales comprises tout entières dans l'ensemble des hexagones d'ombre sont, en effet, celles qui passent entre H et H'.

La longueur de ce segment est $2VK - d$.

Si VK *est inférieur à* $\frac{d}{2}$, *aucun point n'est gardé par les oscillations de* A_1.

7. Le second cas, celui des *oscillations courtes*, est caractérisé par l'inégalité

$$KV > d. \tag{I}$$

Alors le plan de base commun à deux cylindres consécutifs coupe le périmètre de l'hexagone d'ombre totale déduit de l'un quelconque d'entre eux, d'une part au point précédemment considéré (point G' dela figure 5 *bis*) situé sur le cercle de base, d'autre part en un point L' (*fig.* 5 *bis*) situé non plus sur une droite $S_1S'_1$, mais sur une génératrice d'un cône Γ (sur la figure 5 *bis*, le cône Γ_{S_1}).

La distance G'L' est égale à $2V + d\left(1 - \frac{1}{K}\right)$.

Soit L le symétrique de L' par rapport au centre d'un des cylindres aux plans de base desquels il appartient.

Le segment gardé sera *la projection horizontale de* LL'; sa longueur, de $2V + d\left(1 - \frac{2}{K}\right)$.

Le nombre des hexagones ayant une même partie commune peut d'ailleurs être ici plus ou moins considérable, suivant que la hauteur d'un cylindre est contenue un plus ou moins grand nombre de fois dans celle d'un cône. Mais, quel que soit ce nombre d'hexagones se superposant, ceux qui sont immédiatement

consécutifs fournissent à eux seuls les abscisses extrêmes, à droite ou à gauche, des verticales entièrement recouvertes par leur ensemble, de sorte que l'évaluation précédente est indépendante des circonstances qui peuvent se produire à cet égard. Nous avons, en effet [1], constaté qu'un point de l'espace n'est utilement gardé que par les deux cylindres *les plus voisins* de lui.

En résumé, si λ désigne la longueur gardée et si, laissant V et K constants, on prend d comme variable, la ligne représentative de λ en fonction de d est composée de deux segments de droites dont le premier joint le point $(0, 2V)$ au point (VK, VK) tandis que le second part de l'extrémité du premier et aboutit au point $(2VK, 0)$.

Pour $1 < K < 2$, le premier segment de droite est descendant comme le second (tout en étant moins incliné que lui), de sorte que le maximum de λ a lieu pour le barrage *entièrement fixe*. Au contraire, pour $K > 2$, le maximum a lieu pour $d = VK$.

8. Il est essentiel de remarquer que nos résultats dépendent de ce fait qu'un point ne peut être gardé s'il n'est complètement gardé avant ou complètement gardé arrière.

Ce fait, qui a évidemment lieu dans les conditions où nous nous plaçons, ne subsisterait plus si la route des mobiles B était assujettie à être rectiligne avec vitesse constante : et c'est ce qui complique notablement, dans ce dernier cas, la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait garde complète.

Notons qu'une proposition qu'on est conduit à

---

[1] Le même fait est d'ailleurs aisément vérifiable sur une figure.

énoncer dans le cas des routes rectilignes, savoir : « Tout point du barrage qui est gardé contre des mobiles B arrivant perpendiculairement est, par cela même, gardé contre toute autre route suivie par les B », n'est pas exacte à notre point de vue. On s'assure sans difficulté que l'*ombre* portée sur le plan du tableau par un cylindre C_1, lorsque les rayons lumineux sont supposés tous parallèles à une direction de pente $\frac{1}{b}$ dont la projection horizontale est perpendiculaire au plan du tableau, *déborde* l'ombre construite comme il a été expliqué plus haut.

Il existe, par conséquent, des points du barrage qui sont gardés contre les routes perpendiculaires et ne le sont point contre d'autres routes. Un mobile B peut passer en ces points sans être vu par A_1, et cela, d'après ce qui précède, même en suivant une route rectiligne avant et après la ligne de barrage, pourvu qu'il puisse changer de direction en traversant cette ligne.

9. Nous examinerons, en second lieu, le cas du *barrage oscillant en bloc*.

On considère, cette fois, un certain nombre de mobiles A situés à une distance constante D les uns des autres et oscillant solidairement de manière que D reste invariable.

Dans notre mode de représentation, chacun de ces mobiles donnera une série de cylindres disposés comme ceux de la figure 1, les différentes séries correspondant aux différents mobiles se déduisant les unes des autres par des translations successives de longueur D parallèles à la ligne de barrage.

Nous nous placerons, pour simplifier, dans l'hypothèse où la longueur de cette ligne et, par conséquent, le nombre des mobiles sont infinis.

La question est de savoir quelles relations doivent exister entre D, d, V, K pour que toute la ligne soit gardée.

Or il en sera évidemment ainsi si l'ensemble des hexagones (*fig.* 4, 5, 5 *bis*) qui représentent les sections des solides d'ombres (tant avant qu'arrière) par le plan du tableau recouvre ce plan en entier, puisque tout point M de l'espace sera gardé au moins par un des cylindres.

Or l'ensemble de ces hexagones pour un seul mobile est celui qui est représenté figure 5 ou 5 *bis*. Sa plus petite largeur horizontale est G'H' (*fig.* 5) ou G'L' (*fig.* 5 *bis*).

Si donc la translation D, par laquelle on passe de cette série d'hexagones à celle qui est relative au mobile suivant, est inférieure à G'H' ou à G'L', la condition mentionnée tout à l'heure sera vérifiée.

Donc, *la garde sera certainement complète si l'on a*

$$D < V(1 + K), \tag{2}$$

dans le cas des oscillations longues, et si l'on a

$$D < 2V + d\left(1 - \frac{1}{K}\right), \tag{II}$$

dans le cas des oscillations courtes.

10. La question de savoir si cette condition suffisante est également nécessaire est plus délicate.

Remarquons d'abord que tous les cylindres que nous avons à considérer sont tangents aux mêmes plans Π, Π', parallèles au plan du tableau à la distance V de ce plan.

Si, dès lors, nous considérons les séries de cylindres engendrés par deux mobiles barreurs consécutifs A_1, A_2,

ces deux séries de cylindres, joints aux plans Π, Π', enferment une région R de l'espace, limitée sauf dans le sens vertical et dont il est impossible de sortir par un chemin fini (à moins qu'on ne fasse intervenir des valeurs de t inférieures à celle pour laquelle le barrage a commencé à fonctionner, éventualité que nous exclurons) sans rencontrer les cylindres en question ou les plans Π, Π'.

Il en résulte que, dans la garde d'un point M de l'espace intérieur à la région R, on peut faire abstraction des mobiles barreurs autres que A_1 et A_2. Il est, en effet, impossible qu'une route, issue du point M et ne rencontrant pas les cylindres engendrés par A_1 et A_2, rencontre un cylindre engendré par un des mobiles précédents ou suivants, sans avoir, au préalable, traversé le plan Π ou le plan Π'. Or, arrivé en un point N d'un de ces plans, le mobile B est hors de l'action du barrage, de sorte que si la route MN satisfait aux conditions requises en ce qui regarde la pente, le point M est certainement non gardé.

11. Cette remarque faite, envisageons la première oscillation des mobiles barreurs A_1, A_2 : supposons qu'elle ait lieu dans le sens A_2A_1, et qu'elle dure depuis l'instant $t = T$ jusqu'à l'instant $t = T' = T + \tau$. Soient C_1, C_2 les cylindres représentatifs de cette première oscillation pour nos deux mobiles.

Un point de R correspondant à une valeur de t au plus égale à T' n'est évidemment gardé avant que s'il est dans l'ombre avant du cylindre C_1.

Pour passer aux autres points de R, nous utiliserons les remarques du n° *4 bis*.

Cherchons d'abord à reconnaître s'il y a garde (avant) ou non pour un point de la région R situé entre les

deux plans $t = T'$ et $t = T'' = T' + \tau = T + 2\tau$ qui marquent les limites de la seconde oscillation.

Soit M un tel point, et soient C'_1, C'_2 les cylindres, respectivement symétriques de C_1, C_2 par rapport au plan $t = T'$.

M sera certainement gardé avant s'il est dans l'ombre avant de C'_2.

Soit, d'autre part, γ_M le cercle suivant lequel le plan $t = T'$ coupe le cône Γ_M, et qui comprend, par conséquent, tous les points de ce plan qui peuvent être joints à M par une route de pente au plus égale à $\frac{1}{b}$.

M sera également gardé avant si ce cercle γ_M est tout entier compris dans la figure F formée par l'ombre avant portée par C_1 sur le plan $t = T'$, jointe au cercle de base $\mathcal{C}'_2$ commun à C_2 et à C'_2.

Il suffira, d'ailleurs, pour cela, que la figure en question comprenne toute la *circonférence* (¹) de γ_M.

Je vais montrer que, inversement, M n'est pas gardé avant si l'une ou l'autre des deux conditions précédentes n'est pas réalisée.

Si, en effet, M n'est pas dans l'ombre avant de C'_2, le cône Γ_M a au moins une génératrice MN dont le segment inférieur (celui qui correspond aux valeurs de t plus petites que celle du point M) est sans point commun avec C'_2. Le point N où cette génératrice rencontre le plan $t = T'$ est certainement extérieur au cercle $\mathcal{C}'_2$. S'il est également extérieur à l'ombre avant de C_1, il n'est pas gardé avant, et il en est de même de M.

Dans le cas contraire, déplaçons continûment le

(¹) En effet, la partie du plan $t = T'$ qui est extérieure à F est d'un seul tenant. Si elle comprenait un point intérieur à γ_M, on pourrait, de ce point jusqu'à l'infini, mener dans le plan T' un chemin continu sans point commun avec F, lequel couperait nécessairement la circonférence de γ_M.

point N sur γ_M à partir de sa position primitive, et cela successivement dans les deux sens, en entraînant, chaque fois, dans son mouvement, la génératrice MN correspondante.

Les seuls cas qui pourront se présenter seront les suivants :

1° Avant que la génératrice MN ne rencontre $\mathfrak{C}'_2$, le point N sort de la figure F. Nous sommes alors ramenés au cas que nous venons d'envisager, et M n'est pas gardé avant.

2° Le point N, n'ayant pas cessé d'être intérieur à l'ombre avant de C_1, vient en un point N′ de la circonférence $\mathfrak{C}'_2$. Si cette circonstance se présente quel que soit le sens dans lequel nous ferons cheminer N à partir de sa position primitive, les deux points N′, N″ où la circonférence γ_M rencontre $\mathfrak{C}'_2$ divisent cette circonférence en deux arcs dont l'un, celui qui contient le point primitif N, est entièrement intérieur à l'ombre avant de C_1. Comme l'autre est intérieur à $\mathfrak{C}'_2$, nous sommes ramenés au cas précédemment traité où tout le cercle γ_M fait partie de la figure F.

3° La génératrice MN, dans l'un ou dans l'autre des deux déplacements continus qu'on lui fait subir, vient à être tangente (en un point ν) à la surface latérale de C'_2. Le point ν est certainement sur une *bande latérale* de C_2 (*voir* n° *4 bis*) et comme la cote de N est inférieure à celle de ν, il en résulte (encore d'après le n° *4 bis*) que le point N est plus éloigné du plan du tableau que ν. Donc il ne saurait appartenir à l'ombre avant de C_1, dont tous les points (de cote $_1T'$ et non intérieurs au cercle de base commun à C_1 et à C_2) ont un éloignement plus petit que celui des bandes latérales.

Comme N est extérieur à $\mathfrak{C}'_2$, il n'est pas gardé non

plus que M. On voit d'ailleurs que ce cas rentre dans le cas 1°.

Notre conclusion est donc bien démontrée [1]. Par conséquent, dans la région $R^{(1)}$ comprise entre C'_1, C'_2 et les plans horizontaux $t = T'$, $t = T''$, les points gardés sont :

1° Ceux de l'ombre avant de C'_2 ;

2° Ceux qui sont tels que le cercle γ_M correspondant soit entièrement intérieur à la figure F : l'ensemble de ces points n'est autre chose que l'*ombre avant* de F.

Envisageons maintenant le plan $t = T''$. Sur ce plan, l'ombre avant de F découpe une figure f; et, d'autre part, l'ombre avant de C'_2, jointe au cercle de base $\mathfrak{S}''_1$ commun à C'_1 et à C''_1, détermine sur le même plan une figure F′ analogue à F.

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, dans la portion $R^{(2)}$ de R comprise entre le plan $t = T''$ et le plan $t = T''' = T'' + \tau$, les points gardés avant seront :

1° Ceux de l'ombre avant de la figure $F' + f$;

2° Ceux de l'ombre avant du cylindre C''_1, consécutif à C'_1.

Or, une fois que nous aurons appris à construire l'ombre avant de F et, par conséquent, f, qui est la section de cette ombre par le plan $t = T''$, nous verrons que cette figure f est entièrement intérieure à F′.

Donc, les points gardés de $R^{(2)}$ sont ceux de l'ombre de F′ et ceux de l'ombre de C''_1, c'est-à-dire qu'ils

---

[1] En opérant d'une manière un peu différente, on peut arriver à n'utiliser que ce fait que les arcs latéraux de $\mathfrak{S}_2$ (c'est-à-dire les parties des bandes latérales situées dans le plan $t = T'$) ne sont pas gardés.

s'obtiennent exactement par les constructions correspondantes à celles qui donnaient les points gardés de $R^{(1)}$.

Dès lors, il est clair qu'il en sera de même pour toutes les portions suivantes de R, de sorte que nous connaîtrons les points gardés avant dans tout l'espace.

12. Nous avons donc à déterminer les figures F, F′ et leurs ombres.

La section Ω du plan $t = T'$ par l'ombre avant de C_1 comprend :

Dans le cas des oscillations *longues*, le cercle de base $\mathcal{C}'_1$ de C_1 situé dans le plan $t = T'$ et la portion de ce plan comprise entre $\mathcal{C}'_1$ et deux tangentes à ce cercle (traces des plans tangents au cylindre C_1) prolongées jusqu'à leur point d'intersection (*fig.* 6), ce

Fig. 6.

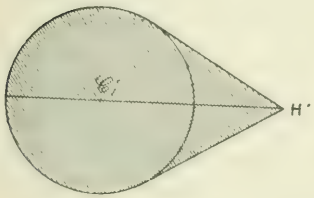
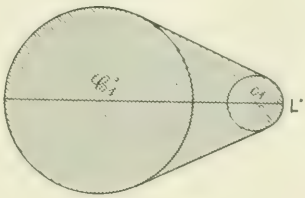


Fig. 6 *bis*.



point d'intersection étant celui que nous avons appelé précédemment H′ ;

Dans le cas des oscillations *courtes*, le cercle $\mathcal{C}'_1$ et la portion de plan comprise entre ce cercle, les tangentes construites comme dans le premier cas et un cercle (¹) c_1 dont le centre est la projection, sur le plan $t = T'$, de celui de $\mathcal{C}'_1$, l'aire du cercle c_1 étant

(¹) c_1 est l'ombre, sur le plan $t = T'$, du cercle $\mathcal{C}_1$, cercle de base de C_1 situé dans le plan initial $t = T$.

comprise et les tangentes étant limitées à leurs points de contact avec c_1 (*fig. 6 bis*).

Si

$$D > V(1 + K),$$

pour les oscillations longues; si

$$D > 2V + d\left(1 - \frac{1}{K}\right),$$

pour les oscillations courtes, c'est-à-dire *si l'on n'est pas dans le cas déjà traité au n° 9*, cette section Ω sera sans point commun avec $\mathfrak{S}'_2$.

Dans ces conditions, il est clair [1] que l'ombre avant de F n'est autre que celle de Ω, plus celle de $\mathfrak{S}'_2$.

Il est clair d'ailleurs que (dans la région $t \geqq T'$) l'ombre de Ω coïncide avec celle de C_1 lui-même.

Coupons maintenant l'ombre ainsi obtenue par le plan $t = T''$, de manière à obtenir la figure f.

L'ombre de $\mathfrak{S}'_2$ fait, par définition, partie de F'.

Quant à l'ombre de Ω, elle est intérieure à $\mathfrak{S}''_1$ ou extérieure à R. Si, en effet, nous prenons d'abord le cas des oscillations courtes, nous voyons que l'ombre de c_1, si elle coupe le plan $t = T''$, le coupe suivant un cercle concentrique à $\mathfrak{S}''_1$, mais de rayon plus petit, et par rapport auquel tout le reste de l'ombre de Ω est du côté opposé à R.

La conclusion est la même *a fortiori* dans le cas où l'ombre de c_1 ne coupe pas notre plan, ou dans le cas des oscillations longues.

L'assertion énoncée au n° 11 est donc établie.

---

(1) Il en serait autrement dans le cas où Ω et $\mathfrak{S}'_2$ se couperaient (cas du n° 9). L'ombre de F serait alors plus étendue que celle de Ω, plus celle de $\mathfrak{S}'_2$. La détermination de cette ombre, que le résultat du n° 9 rend inutile, serait d'ailleurs aisée.

La détermination des points gardés avant se fera donc dans toutes les parties successives de R ($R^{(1)}$ exceptée) comme dans $R^{(2)}$.

Mais comme, de plus, les points gardés avant de $R^{(2)}$ sont situés soit dans l'ombre de C_1 (puisqu'elle coïncide avec celle de Ω) soit dans celle de C'_2, nous trouvons qu'ici encore (dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est-à-dire si les inégalités du n° 9 ne sont pas vérifiées) *un point de l'espace est gardé par un seul cylindre* (et même par un des quatre cylindres immédiatement voisins) *ou n'est pas gardé du tout.*

Le premier cas, ainsi que nous le savons, ne se présente pas pour tous les points du plan du tableau du moment qu'on n'a pas les inégalités du n° 9.

Donc *l'une de ces inégalités* (celle qui correspond au cas où l'on se trouve) *est nécessaire et suffisante pour que le barrage soit gardé.*

Si (V et K étant encore considérés comme constants) on prend d comme abscisse, la ligne qui a comme ordonnée correspondante la valeur maxima de D est une ligne brisée dont le premier segment va du point $(0, 2V)$ au point $[(VK, V(1+K)]$, tandis que le second est horizontal et s'étend indéfiniment.

On voit que, à partir de la valeur $l = VK$, D est indépendant de d.

13. Le cas du *barrage oscillant à contre-bord* [1]

---

[1] Dans ce type de barrage oscillant, chaque mobile oscille encore uniformément dans un intervalle fixe (oscillations représentées par les cylindres de la figure 1). Mais deux mobiles consécutifs se meuvent constamment en sens contraire, et, par conséquent, se rapprochent et s'écartent l'un de l'autre alternativement. Les cylindres représentatifs des oscillations d'un des mobiles étant construits, ceux qui correspondent au mobile suivant sont symétriques des

est plus simple, à un certain point de vue, que le précédent.

Il peut arriver, dans ce cas, que les cylindres relatifs à deux mobiles A consécutifs se coupent, ou, en langage ordinaire, que, à certains instants du mouvement, les cercles de vision se coupent. On n'a même à s'occuper que de l'hypothèse où il en est ainsi ; car si deux cercles de vision consécutifs restent extérieurs même au moment du plus grand rapprochement des mobiles correspondants, ils laissent entre eux un intervalle, lequel est évidemment non gardé.

Il peut même arriver que les mobiles barreurs eux-mêmes se croisent : supposons qu'il en soit ainsi.

Dans ce cas, quatre cylindres voisins (deux relatifs à un mobile et deux au suivant) délimitent (avec les plan Π et Π′) une portion de l'espace complètement fermée en tous sens.

Il en résulte, d'après une remarque déjà faite, que les points de cette portion d'espace, s'ils sont gardés, le sont par l'ensemble de ces quatre cylindres : on les trouvera tous en prenant l'ombre avant de l'ensemble des deux cylindres inférieurs et l'ombre arrière de l'ensemble des deux cylindres supérieurs.

La même remarque s'applique à un cas voisin, celui du barrage en *ligne de file par contre-marche*, lequel est d'ailleurs théoriquement compris dans le précédent.

L'ombre avant d'un système de deux cylindres circulaires symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan a sa frontière empruntée d'une part à celle de l'ombre de chaque cylindre, d'autre part à une surface

---

premiers par rapport à un certain plan perpendiculaire à la ligne de barrage.

(lieu des droites de pente $\frac{1}{b}$ tangentes communes aux deux cylindres), laquelle a pour trace sur le plan du tableau (et pour ligne double) une courbe du quatrième degré facile à construire [1].

La discussion des cotes maxima et minima de cette courbe suffira donc à donner ici les conditions de validité du barrage [2].

[M¹5cα]

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE STROPHOÏDE;

PAR M. R. BOUVAIST.

L'équation d'une strophoïde quelconque rapportée

---

(1) Son équation est

$$\frac{P_1 P_2}{4}\left(1+\frac{1}{K^2}\right)^2-\left[1-\frac{P_1+P_2}{4}\left(1-\frac{1}{K^2}\right)^2\right]=0,$$

où P_1 est le premier membre de l'équation du premier cylindre (ou, plus exactement, l'ensemble des deux génératrices contenues dans le plan du tableau) écrite de manière qu'on ait $P_1=-1$ sur l'axe; soit $P_1=1-\frac{(x-az)^2}{V^2}$ si l'on a pris pour axes les diagonales du losange formé par ces génératrices et les génératrices correspondantes du second cylindre; P_2, la quantité analogue pour le second cylindre.

(2) Il est à remarquer que cette même courbe est celle qui intervient (par une autre de ses portions, il est vrai) lorsqu'on traite le problème des nos 5-8 en supposant le mouvement des B assujetti à être rectiligne et uniforme, avec une vitesse toujours égale à $\frac{1}{b}$.

a un triangle de référence ABC, le point double de la courbe étant en A, les tangentes en ce point étant les bissectrices de l'angle A et la courbe passant par B et C, est

$$x(z^2 - y^2) - 2yz(y\cos B - z\cos C) = 0.$$

Les tangentes en B et C ont respectivement pour équation

$$x + 2z\cos B = 0,$$
$$x + 2y\cos C = 0;$$

ce sont les symétriques du côté BC par rapport à AB et AC.

Le rayon de courbure en un point (α, β, γ) d'une courbe $f(x, y, z) = 0$ rapportée à un triangle de référence ABC est donné par la formule

$$\rho = (p-1)^2 \frac{R^2}{S^2} \frac{P^{\frac{3}{2}}}{H},$$

p étant le degré de la courbe, R le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence, S la surface de ce triangle,

$$\begin{aligned} P = f_\alpha'^2 + f_\beta'^2 + f_\gamma'^2 &- 2f_\beta' f_\gamma' \cos A \\ &- 2f_\gamma' f_\alpha' \cos B \\ &- 2f_\alpha' f_\beta' \cos C, \end{aligned}$$

$$H = \begin{vmatrix} f''^2_{\alpha^2} & f''^2_{\alpha\beta} & f''^2_{\alpha\gamma} \\ f''^2_{\alpha\beta} & f''^2_{\beta^2} & f''^2_{\beta\gamma} \\ f''^2_{\alpha\gamma} & f''^2_{\beta\gamma} & f''^2_{\gamma^2} \end{vmatrix},$$

formule qui, appliquée au point B, donne

$$\rho_1 = \frac{R^2}{4S^2} \frac{h_b^3}{\cos C},$$

h_b étant la hauteur du triangle ABC issue du sommet B;

on a aussi

$$\rho_1 = \frac{R^2}{4S^2}\,\frac{h_b^3}{\cos C} = \frac{h_b}{4\sin^2 B\cos C}.$$

De cette formule on déduit immédiatement la construction suivante : pour obtenir le centre de courbure en un point M d'une strophoïde quelconque de point double O, on détermine le point M′ de la courbe situé sur la droite OM′, symétrique de OM par rapport aux tangentes au point double; sur OM′, on porte à partir de M′ une longueur M′α égale au quart de la distance de M à OM′; la perpendiculaire à OM′ en α coupe MM′ en β; sur la perpendiculaire en M à M′M, on porte Mγ = M′β; la parallèle à MM′ menée par γ coupe OM en δ; on porte sur Mγ, Mε = Mδ; la parallèle à MM′ menée par ε coupe MO en η, Mη est le rayon de courbure en M. La tangente en M est d'ailleurs la symétrique de MM′ par rapport à MO.

Remarque. — Au point B on a

$$\rho_1 = \frac{h_b}{4\sin^2 B\cos C},$$

en C on a de même

$$\rho_2 = \frac{h_c}{4\sin^2 C\cos B},$$

d'où la formule

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{c^3\cos B}{b^3\cos C},$$

donnant le rapport des rayons de courbure en deux points conjugués.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1910.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

Un point matériel de masse unité M (x, y, z) *est soumis à une force* MF *qui a pour composantes*

$$X = -ax, \qquad Y = -by, \qquad Z = -cz,$$

où a, b, c *sont trois constantes positives données :*

1° *Calculer les coordonnées* x, y, z *en fonction du temps, connaissant la position initiale*

$$M_0(x_0, y_0, z_0),$$

ainsi que la vitesse initiale

$$M_0V_0(x'_0, y'_0, z'_0).$$

Conditions pour que le mouvement soit périodique.

2° *Un second point matériel libre de masse* 1 *se trouve coïncider constamment avec l'extrémité* F *de la force* MF. *Montrer que le point* F *obéit au même champ de force que le point* M, *et trouver la vitesse correspondante à la position initiale* F_0 *de ce point.*

3° *Plus généralement, montrer que tout point matériel* N, *de masse* 1, *placé initialement sur la droite* M_0F_0, *peut recevoir une vitesse initiale* N_0W_0 *telle qu'il reste constamment situé sur la droite* MF. *On examinera le cas particulier où la position ini-*

tiale N_0 *du point* N *serait dans l'un des plans de coordonnées.*

4° *La position initiale* N_0 *variant sur la droite* $M_0 F_0$, *trouver le lieu du point* W_0 *et le lieu de la droite* $N_0 W_0$.

1° Les équations du mouvement du point M sont :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - ax = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + by = 0, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + cz = 0.$$

En les intégrant et tenant compte des conditions initiales données, on trouve

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 \cos\sqrt{a}\,t + \frac{x'_0}{\sqrt{a}} \sin\sqrt{a}\,t, \\ y &= y_0 \cos\sqrt{b}\,t + \frac{y'_0}{\sqrt{b}} \sin\sqrt{b}\,t, \\ z &= z_0 \cos\sqrt{c}\,t + \frac{z'_0}{\sqrt{c}} \sin\sqrt{c}\,t. \end{aligned} \right.$$

x, y, z sont trois fonctions périodiques de t dont les périodes sont $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{b}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$. Pour que le mouvement soit périodique, il faut et il suffit que ces trois périodes soient des sous-multiples d'une période commune μ :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a}} = \frac{\mu}{p}, \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{b}} = \frac{\mu}{q}, \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{\mu}{r},$$

et pour cela il faut et il suffit que les rapports $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ et $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$ soient *rationnels*.

2° Les coordonnées du point F sont

$$\begin{aligned} x_1 &= x + X = (1 - a)x, \\ y_1 &= y + Y = (1 - b)y, \\ z_1 &= z + Z = (1 - c)z. \end{aligned}$$

La force qui, agissant sur F, produirait ce mouve-

ment a pour composantes

$$X_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = (1-a)\frac{d^2 x}{dt^2} = -(1-a)ax = -ax_1,$$

$$Y_1 = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = (1-b)\frac{d^2 y}{dt^2} = -(1-b)by = -by_1,$$

$$Z_1 = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = (1-c)\frac{d^2 z}{dt^2} = -(1-c)cx = -cz_1.$$

Le point F obéit donc bien au même champ de forces; les valeurs initiales des composantes de sa vitesse sont

$$(1-a)x'_0, \qquad (1-b)y'_0, \qquad (1-c)z'_0.$$

3° Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point N *que nous supposerons placé dans le même champ de force*. Ces coordonnées seront donc données à chaque instant par les formules

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos\sqrt{a}\,t + \frac{\xi'_0}{\sqrt{a}} \sin\sqrt{a}\,t, \\ \eta &= \eta_0 \cos\sqrt{b}\,t + \frac{\eta'_0}{\sqrt{b}} \sin\sqrt{b}\,t, \\ \zeta &= \zeta_0 \cos\sqrt{c}\,t + \frac{\zeta'_0}{\sqrt{c}} \sin\sqrt{c}\,t. \end{aligned} \right.$$

Le point N étant placé initialement sur la droite $M_0 F_0$, on a, en posant

$$\lambda = \frac{M_0 N_0}{M_0 F_0},$$

$$(3) \quad \xi_0 = (1-\lambda a)x_0, \qquad \eta_0 = (1-\lambda b)y_0, \qquad \zeta_0 = (1-\lambda c)z_0.$$

Pour que ce point N reste constamment sur la droite MF, il faut que, quel que soit t, on ait

$$\frac{\xi - x}{ax} = \frac{\eta - y}{by} = \frac{\zeta - z}{cz},$$

ou

$$\frac{\xi - (1-\lambda a)x}{ax} = \frac{\eta - (1-\lambda b)y}{by} = \frac{\zeta - (1-\lambda c)z}{cz},$$

ce qui s'écrit, en remplaçant ξ, η, ζ et x, y, z par leurs valeurs (2) et (1) en fonction de t, et tenant compte des relations (3),

$$(4) \qquad \frac{U \sin\sqrt{a}\,t}{x} = \frac{V \sin\sqrt{b}\,t}{y} = \frac{W \sin\sqrt{c}\,t}{z},$$

en posant

$$U = \frac{\xi'_0 - (1 - \lambda a)x'_0}{a^{\frac{3}{2}}},$$

$$V = \frac{\eta'_0 - (1 - \lambda b)y'_0}{b^{\frac{3}{2}}},$$

$$W = \frac{\zeta'_0 - (1 - \lambda c)z'_0}{c^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'une des trois quantités U, V, W est nulle, les égalités (4) prouvent que les trois autres le sont et les projections de la vitesse initiale $N_0 W_0$ sont

$$(5) \quad \xi'_0 = (1 - \lambda a)x'_0, \quad \eta'_0 = (1 - \lambda b)y'_0, \quad \zeta'_0 = (1 - \lambda c)z'_0.$$

Si aucune des trois quantités U, V, W n'est nulle, les relations (4) inversées s'écrivent

$$\frac{x_0}{U}\cot\sqrt{a}\,t + \frac{x'_0}{U\sqrt{a}} = \frac{y_0}{V}\cot\sqrt{b}\,t - \frac{y'_0}{V\sqrt{b}}$$
$$= \frac{z_0}{W}\cot\sqrt{c}\,t + \frac{z'_0}{W\sqrt{c}};$$

elles ne peuvent pas être *identiquement* vérifiées lorsque a, b, c sont différents.

Si $a = b = c$, on peut y satisfaire en posant

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_0}{U} = \dfrac{y_0}{V} = \dfrac{z_0}{W}, \\[2ex] \dfrac{x'_0}{U} = \dfrac{y'_0}{V} = \dfrac{z'_0}{W}. \end{cases}$$

Ceci exige que

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{y'_0}{y_0} = \frac{z'_0}{z_0},$$

c'est-à-dire que la force soit une attraction de centre O, proportionnelle à la distance, et que la vitesse initiale soit dirigée suivant OM.

Ces conditions remplies, les relations (6) se réduisent à

$$\frac{\xi'_0}{x'_0} = \frac{\eta'_0}{y'_0} = \frac{\zeta'_0}{z'_0},$$

qui expriment que N_0W_0 est également dirigée suivant la même droite ON_0 confondue avec OM_0.

Ce cas particulier est évident. En effet, si la force est une attraction de centre O et que la vitesse initiale passe par O, la trajectoire de M est la droite OM_0 qui contient toujours OF. Pour que N reste sur OF, il faut et il suffit qu'il reste sur OM_0, et pour cela il faut et il suffit que sa vitesse initiale passe par O.

Si l'on écarte ce cas particulier, on voit que les conditions (5) sont les conditons générales cherchées. En portant les valeurs initiales données par les égalités (3) et (5) dans les formules (2), elles deviennent

$$\xi = (1 - \lambda a)x, \qquad \eta = (1 - \lambda b)y, \qquad z = (1 - \lambda c)z.$$

Elles expriment que le rapport $\frac{MN}{MF}$ reste *constant* et égal à λ.

Si, au commencement du mouvement, le point N est dans un des plans de coordonnées, par exemple si $\zeta_0 = 0$ sans que z_0 soit nul, ceci exige

$$1 - \lambda c = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{c},$$

et alors z reste constamment nulle. Le point N reste dans ce plan de coordonnées.

4° Les coordonnées du point W_0 sont :

$$x_2 = \xi_0 + \xi'_0 = (1 - \lambda a)(x_0 + x'_0),$$
$$y_2 = \eta_0 + \eta'_0 = (1 - \lambda b)(y_0 + y'_0),$$
$$z_2 = \zeta_0 + \zeta'_0 = (1 - \lambda c)(z_0 + z'_0).$$

Quand λ varie le point W_0 décrit donc *une droite*. Les coordonnées d'un point quelconque P de la droite $N_0 W_0$ sont :

$$x = \xi_0 + \mu\xi'_0 = (1 - \lambda a)(x_0 + \mu x'_0),$$
$$y = \eta_0 - \mu\eta'_0 = (1 - \lambda b)(y_0 + \mu y'_0),$$
$$z = \zeta_0 + \mu\zeta'_0 = (1 - \lambda c)(z_0 + \mu z'_0).$$

Les coordonnées du point P sont ainsi exprimées en fonction de deux paramètres λ et μ. Le lieu de P est évidemment un paraboloïde hyperbolique dont les deux systèmes de génératrices sont ainsi mis en évidence.

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

1° *Trouver une série entière en x qui satisfasse à l'équation différentielle*

$$(E) \qquad 9(1 - x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 9x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

et aux conditions initiales suivantes : pour $x = 0$, la série doit prendre la valeur 1 et sa dérivée doit prendre la valeur $-\frac{1}{3}$.

2° *Déterminer l'intervalle de convergence de la*

série trouvée. La fonction de x que définit cette série dans son intervalle de convergence sera désignée par $f(x)$.

3° *Montrer qu'il existe une infinité de changements de la variable indépendante, de la forme $t = \varphi(x)$, qui transforment identiquement l'équation* (E) *en une équation linéaire à coefficients constants ; trouver tous ces changements de variables.*

4° *L'un des changements de variables précédents est $x = \cos 3t$. Partant de là, prouver que les formules*

$$x = \cos 3t, \qquad y = \cos t - \sin t$$

définissent, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, le même arc de courbe que l'équation $y = f(x)$, pourvu que t varie dans un intervalle qu'on déterminera.

5° *Les équations paramétriques précédentes représentent, quand on n'y limite pas la variabilité du paramètre, une courbe* (C). *Montrer que cette courbe est coupée par une droite $y = h$ en deux points au plus et que ces points existent pour toutes les valeurs de la constante h qui sont comprises entre deux certains nombres α et β. Ces points seront désignés par* M *et* M'.

6° *On imagine qu'on divise le segment de droite* MM' *en trois parties égales ; soient* P *et* P' *les points de division. Calculer l'aire comprise entre les arcs de courbe que décrivent* P *et* P' *quand h varie de α à β.*

1° Soit

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$
$$+ a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots$$

la série entière vérifiant l'équation (E).

Calculons $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ et ordonnons suivant les puissances croissantes de x la série

$$9(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-9x\frac{dy}{dx}-y$$

et écrivons que tous les coefficients de cette série sont nuls. Nous obtenons ainsi les équations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}
&a_0+2.9a_2=0,\\
&-2.4a_1+9.3.2a_3=0,\\
&-5.7a_2+9.4.3a_4=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&-(3m-1)(3m-1)a_m+9(m+2)(m+1)a_{m+2}=0.
\end{aligned}$$

On en tire d'abord pour les coefficients d'indices pairs

$$\begin{aligned}
a_2&=-\frac{1}{9}\frac{a_0}{2},\\
a_4&=-\frac{1}{9}\frac{5.7}{3.4}a_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{2p+2}&=\frac{1}{9}\frac{(6p-1)(6p-1)}{(2p+1)(2p-2)}a_{2p},
\end{aligned}$$

et, en multipliant membres à membres,

$$a_{2p+2}=\frac{-1}{9^{p+1}}\frac{5.7.11.13\dots(6p-1)(6p+1)}{(2p-2)!}a_0.$$

Au numérateur du second membre figurent les nombres impairs où l'on a supprimé les multiples de 3. On a donc

$$5.7.11.13\dots(6p-1)(6p+1)=\frac{1.3.5.7.9\dots(6p+1)}{3.9.15\dots(6p-3)}$$

$$=\frac{1.3.5.7.1.9\dots(6p+1)}{3^p.1.3.5\dots(2p-1)}=\frac{(2p+1)(2p-3)\dots(6p+1)}{3^p}.$$

Ceci permet d'écrire

$$a_{2p+2} = -\frac{(2p+1)(2p+3)\ldots(6p+1)}{3^{3p+2}(2p+2)!}a_0.$$

Pour les coefficients d'indices impairs, on a

$$a_3 = \frac{1}{9}\,\frac{2.4}{2.3}\,a_1,$$

$$a_5 = \frac{1}{9}\,\frac{8.10}{4.5}\,a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{2p-1} = \frac{1}{9}\,\frac{(6p-4)(6p-2)}{2p(2p+1)}\,a_{2p-1};$$

et, en multipliant membres à membres,

$$a_{2p+1} = \frac{1}{9^p}\,\frac{2.4.8.10\ldots(6p-4)(6p-2)}{(2p+1)!}\,a_1.$$

En opérant comme plus haut, on trouve

$$a_{2p+1} = \frac{2p(2p+2)\ldots(6p-4)(6p-2)}{3^{3p-1}(2p+1)!}\,a_1.$$

Pour satisfaire aux conditions initiales de l'énoncé, on prend

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_1 = -\frac{1}{3};$$

on en conclut

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{3^2.2}, \quad a_3 = -\frac{2.4}{3^3.3!}, \quad \ldots,$$

$$a_{2p} = -\frac{(2p-1)(2p+1)(2p+3)\ldots(6p-5)}{3^{3p-1}(2p)!},$$

$$a_{2p+1} = -\frac{2p(2p+2)(2p+4)\ldots(6p-2)}{3^{3p}(2p+1)!}.$$

2° Pour déterminer l'intervalle de convergence, considérons les deux séries formées par les termes de rang

pair et de rang impair. On a d'abord

$$\frac{a_{2p+2}x^{2p+2}}{a_{2p}x^{2p}} = \frac{(6p-1)(6p+1)}{3^2(2p+1)(2p+2)}x^2$$

et

$$\frac{a_{2p+1}x^{2p+1}}{a_{2p-1}x^{2p-1}} = \frac{(6p-4)(6p-2)}{3^2.2p(2p+1)}x^2.$$

Quand p croît indéfiniment, chacun de ces rapports tend vers x^2. Chacune de ces séries sera donc convergente si $x^2 < 1$.

L'intervalle de convergence est donc $-1, +1$.

3° Posons

$$t = \varphi(x);$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\varphi'(x)$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2(x) + \frac{dy}{dt}\varphi''(x).$$

L'équation (E) devient, après le changement,

$$9(1-x^2)\varphi'^2(x)\frac{d^2y}{dt^2} + 9[(1-x^2)\varphi''(x) - x\varphi'(x)]\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Remarquons que le coefficient de $\frac{dy}{dt}$ est égal à la dérivée par rapport à x du coefficient de $\frac{d^2y}{dt^2}$ divisée par $2\varphi'(x)$. Si donc le coefficient de $\frac{d^2y}{dt^2}$ est constant, celui de $\frac{dy}{dt}$ sera *nul*.

Pour satisfaire à l'énoncé, il suffit donc de prendre

$$9(1-x^2)\varphi'^2(x) = 9C^2$$

ou

$$\varphi'(x) = \frac{C}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi(x) = C \arccos x,$$

C étant une constante arbitraire.

L'équation (E) devient alors

$$(E') \qquad 9C^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0.$$

4° On a

$$t = C \operatorname{arc\,cos} x.$$

Posons $C = \frac{1}{3}$, on en tire

$$x = \cos 3t.$$

Pour que la série soit convergente, il faut faire varier x de -1 à $+1$. Parmi les diverses valeurs de t correspondantes, choisissons l'intervalle $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ dans lequel x s'annule pour $t = \frac{\pi}{2}$.

Dans cet intervalle, t croît avec x; donc $\varphi'(x)$ est positif, et l'on a

$$\varphi'(x) = \frac{dt}{dx} = + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}.$$

L'équation (E') devient

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

Son intégrale générale est

$$y = A \cos t + B \sin t.$$

Pour trouver celle qui correspond à $y = f(x)$, remarquons que, pour $x = 0$, on a

$$y = 1, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3};$$

par suite, comme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}},$$

on en conclut que, pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, on doit avoir

$$y = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = -1,$$

ce qui donne, pour les constantes,

$$A = B = 1.$$

La courbe

$$(C) \qquad x = \cos 3t, \qquad y = \cos t + \sin t$$

coïncide donc, lorsqu'on fait varier t de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$, avec l'arc de la courbe $y = f(x)$, quand x varie de -1 à $+1$.

5° Les points d'intersection de la courbe (C) avec la droite $y = h$ correspondent aux valeurs du paramètre t qui sont racines de l'équation

$$\cos t + \sin t = h,$$

ou, en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Cette dernière n'aura de solution que si h reste compris entre $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$. Pour une telle valeur de h, soit θ l'angle compris entre 0 et π, tel qu'on ait

$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{2}},$$

les solutions de l'équation sont alors données par la formule

$$t = \frac{\pi}{4} \pm \theta + 2k\pi.$$

A ces valeurs de t ne correspondent que deux points et

deux seulement :

$$M \begin{cases} x = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 3\theta\right), \\ y = \sqrt{2}\cos\theta; \end{cases}$$

$$M' \begin{cases} x = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3\theta\right), \\ y = \sqrt{2}\cos\theta. \end{cases}$$

6° Le segment PP′ est le *tiers* du segment MM′. L'élément différentiel de l'aire cherchée est donc

$$\begin{aligned} \overline{PP'}\,dy &= \frac{1}{3}\overline{MM'}\,dy \\ &= \frac{1}{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3\theta\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 3\theta\right)\right]dy \\ &= \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{4}\sin 3\theta\left(-\sqrt{2}\sin\theta\,d\theta\right) \\ &= -\frac{2}{3}\sin 3\theta\sin\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

Le signe de cet élément différentiel, quand θ varie de o à π, dépend de celui de $\sin 3\theta$. Il est négatif quand θ croît de o à $\frac{\pi}{3}$, positif quand θ croît de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$ et négatif quand θ croît de $\frac{2\pi}{3}$ à π. La courbe comprend donc trois boucles.

L'aire S_1 de la première boucle est

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{3}\sin 3\theta\sin\theta\,d\theta,$$

$$S_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 4\theta - \cos 2\theta)\,d\theta,$$

$$S_1 = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

L'aire S_2 de la seconde boucle est

$$S_2 = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Enfin, l'aire S_3 de la troisième boucle est

$$S_3 = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{4}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Si l'on convient d'affecter les aires du signe (+) ou du signe (—) suivant qu'elles sont à gauche ou à droite d'un mobile parcourant la courbe (C) dans le sens des θ croissants, l'aire totale est

$$S = -(S_1 + S_2 + S_3) = 0.$$

Si l'on prend les aires géométriques des boucles, l'aire totale est

$$S = -S_1 + S_2 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

L'élongation u d'une vibration amortie a pour expression, en fonction du temps t,

$$u = U\frac{e^{-st}}{\cos\varphi}\cos(rt - \varphi) \qquad \left(s = \frac{\sin\varphi}{\theta},\ r = \frac{\cos\varphi}{\theta},\ e = 2{,}718\right).$$

1° *Quelles sont les valeurs de t qui donnent à u*

soit une valeur nulle, soit une valeur maximum ou minimum?

2° *Pour* $U = 1^{cm}$, $\theta = 1^{sec}$, $\varphi = 45°$, *construire une table des valeurs de u en fonction de t, du premier maximum de u à son premier minimum et procédant par huitièmes de cet intervalle.*

3° *Comment cette table peut-elle être étendue à l'intervalle suivant?*

[Nota. — *Les calculs numériques devaient être effectués à la règle à calcul* (¹).]

1° La fonction u s'annule pour $\cos(rt - \varphi) = 0$, ou $rt = \varphi + \frac{2n+1}{2}\pi$, d'où

$$t = \frac{\theta}{\cos\varphi}\left(\varphi - \frac{2n+1}{2}\pi\right). \tag{1}$$

Quant à sa dérivée, elle s'annule pour

$$r\sin(rt - \varphi) - s\cos(rt - \varphi) = 0$$

ou

$$\cos\varphi\sin(rt - \varphi) + \sin\varphi\cos(rt - \varphi) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\sin rt = 0,$$

d'où

$$rt = n\pi$$

et

$$t = \frac{n\pi\theta}{\cos\varphi}, \tag{2}$$

les valeurs *paires* de n correspondant à des *maxima*, les valeurs *impaires* à des *minima*.

(¹) C'était la première fois que ce mode de calcul était imposé aux candidats à l'École Polytechnique; aussi avons-nous pensé qu'il n'était pas inutile d'indiquer ici la façon détaillée dont il fallait procéder.

Le premier maximum a donc lieu pour $t = 0$ (il est égal à U) et le premier minimum pour $t = \frac{\pi\theta}{\cos\varphi}$.

2° Avec les données, la valeur de u devient

$$u = \frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{\cos 45^\circ} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou, si l'on pose $\frac{t}{\sqrt{2}} = \tau$,

$$u = \frac{e^{-\tau}}{\cos 45^\circ} \cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right)$$

dont il s'agit de calculer les valeurs depuis $\tau = 0$ jusqu'à $\tau = \pi$, par échelons de $\frac{\pi}{8}$.

Cette formule pouvant s'écrire

$$\frac{u}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \tau\right)} = \frac{e^{-\tau}}{\sin 45^\circ},$$

on voit que, plaçant l'échelle S′ des sinus de la réglette en contact avec l'échelle N_1 des nombres, de même module, de la règle (c'est-à-dire, dans la règle Mannheim, l'échelle supérieure) lorsqu'on aura mis le trait 45° de S′ en coïncidence avec le trait $e^{-\tau}$ de N_1, le trait $\frac{3\pi}{4} - \tau$ de S′ sera en coïncidence avec le trait de N_1 dont la lecture sera la valeur de u.

Puisque, d'ailleurs, on sait que, pour $\tau = 0$ et $\tau = \frac{3\pi}{4}$, on a respectivement $u = 1$ et $u = 0$, il suffit de faire le calcul pour les sept valeurs de τ :

$$\frac{\pi}{8},\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{3\pi}{8},\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{8},\quad \frac{7\pi}{8},\quad \pi.$$

Il s'agit d'abord de calculer les valeurs correspon-

dantes de $e^{-\tau}$. Pour cela, ayant écrit les sept valeurs précédentes en nombres

0,3927 0,7854 1,1781 1,5708 1,9635 2,7489 3,1416

on multiplie chacun de ces nombres, au moyen de la règle (opération classique), par la valeur de $\log e$ obtenue sur la règle. Pour cela l'échelle P′ E′ des *parties égales* de la réglette étant disposée (avec le sens croissant de gauche à droite) de façon que son origine O coïncide avec l'origine 1 de l'échelle des nombres N_2 (module double de celui de N_1) de la règle, on constate que le trait 2,718 de N_2 coïncide avec le trait 434 de P′ E′ et, par suite,

$$\log e = 0,434.$$

La multiplication par ce nombre (lu sur N_1 et avec lequel on amène en coïncidence le trait 1 de l'échelle des nombres N'_1 de la réglette) des sept nombres précédents (lus aussi sur N'_1) donne (par lecture des coïncidences sur N_1)

0,675 0,456 0,308 0,208 0,140 0,064 0,0432

qui sont les valeurs de $e^{-\tau}$.

On peut dès lors effectuer le calcul des valeurs correspondantes de u (ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus) et l'on trouve comme valeurs numériques

0,882 0,645 0,402 0,208 0,076 0,0347 0,0432

Le calcul n'a d'ailleurs pas à être effectué pour la quatrième et la dernière, respectivement égales aux valeurs correspondantes de $e^{-\tau}$.

Transformant en nombres les valeurs correspondantes de $t = \tau\sqrt{2}$ (ce qui se fait immédiatement avec

la règle), on obtient finalement le Tableau demandé :

t en sec.	u en cm.
0	1
0,558	0,882
1,116	0,645
1,674	0,402
2,232	0,208
2,790	0,076
3,348	0
3,906	—0,0347
4,465	—0,0432

3° Si τ' est une valeur de τ prise dans le second intervalle, de π à 2π, et si u' est la valeur correspondante de u, nous avons, en posant $\tau' = \tau + \pi$,

$$u' = \frac{e^{-\tau-\pi}\cos\left(\tau-\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 45^\circ} = -e^{-\pi}\frac{e^{-\tau}\cos\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 45^\circ} = -e^{-\pi}u.$$

Les valeurs u' du second intervalle s'obtiennent donc en multipliant les valeurs correspondantes du premier par $-e^{-\pi} = -0,0432$.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les théories générales de l'Analyse, par M. *René Baire*. Tome II : Variables complexes; Applications géométriques. Un volume grand in-8, x-347 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908. Prix : 12fr.

J'ai déjà exprimé mon admiration pour le Tome I des *Leçons* publiées par M. René Baire (1). Le Tome II ne lui

(1) *Nouvelles Annales*, 1907, p. 508.

cède en rien : nous y retrouvons le même souci d'une rigueur parfaite, la même élégance, et surtout ce même sentiment profond de l'ordonnance des faits, qui donne à l'Ouvrage un caractère d'unité et d'harmonie. On ne citerait guère de livres où la vérité mathématique soit à la fois serrée d'aussi près et vue d'aussi haut. Il ne faut pas hésiter à prononcer à propos de celui-ci le mot de chef-d'œuvre.

Le Chapitre IV (les trois premiers Chapitres composent le Tome I) est consacré aux fonctions analytiques. C'est une étude qu'on aborde souvent en distinguant le point de vue de Cauchy, celui de Riemann, celui de Weierstrass.

L'auteur estime qu'un tel « scrupule traditionnaliste » est aujourd'hui sans raison d'être. Il lui semble préférable de synthétiser l'œuvre des créateurs de l'Analyse, de manière à profiter de tous les avantages que présentent leurs diverses méthodes. Il utilise donc concurremment la notion d'intégrale de variables complexes et celle de série entière, et les premiers paragraphes du Chapitre ont pour objet d'établir le théorème fondamental, d'après lequel toute fonction ayant une dérivée est par cela même représentable par une série entière. Le théorème est plus loin étendu de la façon la plus élégante aux fonctions de plusieurs variables; en même temps sont établies des inégalités qui seront utiles plus tard, dans la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations différentielles.

Signalons encore le parti que tire M. Baire, dans l'étude des séries, de la notion de *convergence normale*. Il dit qu'une série est normalement convergente quand ses termes sont inférieurs en module à ceux d'une série numérique convergente. Cette notion est plus maniable que celle de la convergence uniforme, et systématiquement appliquée, permet de simplifier plusieurs démonstrations.

Au Chapitre V on aborde les équations différentielles. Le théorème fondamental sur l'existence des intégrales est exposé en trois pages (deuxième démonstration de Cauchy, dite par le *Calcul des limites*). Le reste du Chapitre est surtout consacré aux équations différentielles qu'on sait intégrer : équations du premier ordre homogènes, linéaires, de Lagrange, etc.; équations différentielles linéaires : équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont il est fait une étude assez approfondie. Le Chapitre se termine par quelques indications

succinctes sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, avec une application au problème de la propagation du son.

Le Chapitre VI concerne les applications géométriques. En cent et quelques pages, l'auteur a réussi à condenser tous les principes essentiels de la géométrie des courbes et des surfaces : enveloppes, courbure et torsion des courbes, contact des courbes et des surfaces, courbure des surfaces, lignes asymptotiques, lignes de courbure, surfaces réglées, déformation et représentation des surfaces, lignes géodésiques.

Dans le traitement de tous ces sujets, M. Baire apporte ses qualités ordinaires de concision élégante en même temps que le soin d'élucider à fond toutes les questions délicates, en particulier les questions de signe. Signalons par exemple le paragraphe relatif à la courbure et à la torsion d'une courbe gauche, et à l'étude de la disposition de cette courbe par rapport au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale en un de ses points.

Enfin le Chapitre VII, qui termine le Livre, a pour objet l'étude des fonctions elliptiques, présentées comme illustration des principes généraux de l'Analyse. Il existe plusieurs manières d'exposer la théorie de ces fonctions, et aucune ne paraît encore s'être imposée définitivement. Voici comment procède l'auteur : il débute par la théorie des produits infinis, dont il donne comme exemples les développements de $\sin x$ et $\cos x$. Il définit ensuite la fonction σu par l'égalité

$$\sigma u = u \prod{}' \left[\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}} \right],$$

$$(s = 2m\omega + 2n\omega'; \quad m, n \neq 0).$$

La convergence et les propriétés fondamentales de σu étant établies, on introduit les fonctions

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \qquad \wp u = -\zeta' u.$$

On reconnaît que $\wp u$ est méromorphe et doublement périodique. Viennent ensuite les théorèmes concernant les fonctions les plus générales qui présentent ce double carac-

tère, c'est-à-dire *les fonctions elliptiques* (une fonction elliptique entière se réduit à une constante, la somme des résidus dans un parallélogramme de périodes est nulle, etc.). Ces théorèmes permettent d'approfondir l'étude de la fonction p, en particulier d'établir la relation fondamentale

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

On passe aux trois modes d'expression classiques d'une fonction elliptique au moyen de σ, de ζ, de p et p', ce qui donne entre autres la formule d'addition de pu.

Le cas des invariants réels et le problème de l'inversion pour ce cas sont examinés de près. Enfin, dans quelques pages qui terminent le volume, sont esquissées les applications géométriques des fonctions elliptiques : courbes de genre 1, théorème de Poncelet.

On remarquera qu'il n'est pas question des séries thêta. C'est qu'en effet l'introduction de ces séries se justifie surtout quand on veut pousser l'emploi des fonctions elliptiques jusqu'aux calculs numériques ou bien dans certaines applications à la théorie des nombres. De tels développements étaient tout à fait en dehors des limites que s'était fixées l'auteur, et il n'aurait pu s'y engager sans faire perdre à son Ouvrage le caractère de généralité qu'il s'était expressément prescrit.

R. B.

[O'5j]

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT PAR QUADRATURES

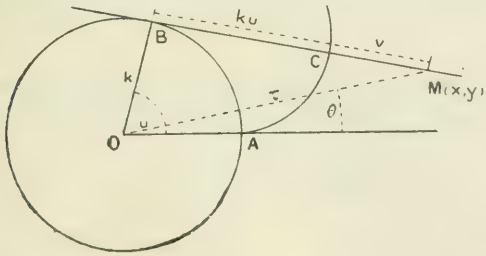
(TROISIÈME NOTE);

PAR M. A. BUHL.

1. Ce travail fait suite aux précédents publiés ici en octobre 1908 et août 1909. Je vais surtout revenir sur une surface moulure de ma précédente Note, ainsi que sur le théorème qui la terminait et était relatif aux surfaces de révolution.

Reprenons d'abord la moulure engendrée par une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre de révolution de rayon fixe k.

L'axe du cylindre sera Oz, le plan mobile se projettera, sur le plan Oxy que représente la figure, sui-



vant BM, M étant la projection du point (x, y, z) de la surface. Avec les coordonnées curvilignes u et v que la figure définit bien suffisamment, nous aurons

$$x \cos u + y \sin u = k,$$
$$x \sin u - y \cos u = ku - v$$

d'où, pour équations de la surface,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = k\cos u - (ku + v)\sin u, \\ y = k\sin u - (ku + v)\cos u, \\ z = F(v). \end{cases}$$

La méthode classique conduit alors, pour définir les asymptotiques, à l'équation différentielle

$$(2)\qquad (ku + v)\,du^2 + \frac{F''(v)}{F'(v)}\,dv^2 = 0.$$

Remarquons que, si le cylindre O se réduit à son axe, on a

$$k = 0, \qquad v = r, \qquad u = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Dans ces conditions la moulure se réduit à une surface de révolution et l'équation (2) donne immédiatement l'équation bien connue des asymptotiques d'une telle surface.

Dans la Note précédente l'équation (2) était remplacée par une autre relative aux coordonnées polaires r et θ. Nous passerons bientôt de l'une à l'autre; pour l'instant conservons les coordonnées u et v.

2. L'équation (2) ne semble intégrable par les méthodes élémentaires que si l'on a

$$(3)\qquad \frac{F''(v)}{F'(v)} = -(4\alpha^2 v + 2\beta),$$

α et β étant des constantes quelconques. Dans ces conditions, si l'on pose

$$(4)\qquad v = v_1 - \frac{\beta}{2\alpha^2}, \qquad u = u_1 + \frac{\beta}{2k\alpha^2}, \qquad \alpha \neq 0.$$

elle devient

$$\frac{du_1}{dv_1} = \pm 2\alpha\sqrt{\frac{v_1}{ku_1 - v_1}}.$$

Posant encore

$$\frac{ku_1 + v_1}{v_1} = t^2,$$

il vient définitivement

$$(5) \qquad \frac{dv_1}{v_1} = \frac{2t^2\,dt}{2k\alpha - t - t^3}.$$

En somme, il s'agissait d'une de ces équations qu'un changement linéaire de variables ramène au type homogène.

Quant à l'équation (3) elle donne immédiatement la fonction F et, d'après la forme de l'équation (5), on peut énoncer le théorème suivant :

Si la courbe, en coordonnées cartésiennes v et z,

$$z = \int e^{-2(\alpha^2 v^2 + \beta v + \gamma)}\,dv$$

roule sur un cylindre de révolution de génératrices parallèles à Oz, elle engendre une moulure dont la détermination des asymptotiques ne dépend que de quadratures élémentaires.

3. Le paragraphe précédent doit être modifié si $\alpha = 0$, car alors le changement de variables (4) n'a plus de sens précis. Il y a même avantage à modifier légèrement toutes les notations. Si μ est une constante, soit

$$\frac{F''}{F} = -\mu^2 \qquad \text{d'où} \qquad F = Ae^{-\mu^2 v}.$$

Alors (2) devient

$$(ku + v)\,du^2 = \mu^2\,dv^2.$$

Si l'on pose

$$R = \pm\sqrt{ku - v},$$

on intègre immédiatement, ce qui donne

$$\frac{u}{2\mu} = R - k\mu \log(R + k\mu) + C.$$

Donc, pour les asymptotiques de la moulure engendrée par roulement de la courbe exponentielle, la conclusion est la même qu'au paragraphe précédent, avec cette simplification que les quadratures se font immédiatement, tandis que, pour intégrer la fraction rationnelle en t de l'équation (5), il faut commencer par chercher les racines d'un polynome du troisième degré.

4. Les résultats précédents me semblent constituer à peu près tout ce qu'on peut trouver d'élémentaire concernant les asymptotiques des moulures (1). J'ajouterai quelques remarques qui, si elles n'avancent pas beaucoup la question de l'intégration de (2), ont cependant l'intérêt de rattacher cette équation à d'autres recherches. Pour cela il est plus commode de reprendre les notations de la Note précédente et de substituer, comme l'indique la figure, les coordonnées semi-polaires r, θ, z aux coordonnées curvilignes u, v.

Posons

$$(ku + v)^2 = r^2 - k^2 = R^2$$

et (2) devient

$$\frac{dR}{dv} = 1 \pm k\sqrt{-\frac{F''}{F'R}}.$$

Imaginons que $F(v) = z$ donne $v = \Phi(z)$. Alors

$$\frac{F''(v)}{F'(v)} = \frac{\frac{d}{dv}\left(\frac{dz}{dv}\right)}{\frac{dz}{dv}} = \frac{d}{dz}\frac{1}{\Phi'(z)} = -\frac{\Phi''(z)}{\Phi'^2(z)}.$$

Posant, toujours comme dans la Note précédente,

$$\Phi'' = \Phi'^2 f(\Phi),$$

nous retombons sur l'équation différentielle déjà obtenue

$$(6) \qquad \frac{dR}{d\Phi} = 1 \pm k\sqrt{\frac{f(\Phi)}{R}},$$

dans laquelle les variables sont au fond r et z et qui, par suite, définira les asymptotiques de notre surface moulure en la coupant par deux familles de surfaces de révolution d'axe Oz.

5. C'est l'équation (6) qui est susceptible d'être rapidement transformée en d'autres se rattachant à des problèmes différents.

Posons $R = \rho^{2m}$. Elle devient

$$2m\frac{d\rho}{d\Phi} = \rho^{1-2m} \pm k\sqrt{f(\Phi)}\,\rho^{1-3m},$$

ou, si $m = -1$,

$$-2\frac{d\rho}{d\Phi} = \rho^3 \pm k\sqrt{f(\Phi)}\,\rho^4.$$

Or, si $\sqrt{f(\Phi)}$ est rationnel, on obtient une de ces équations qui ont donné récemment et donnent encore lieu à de remarquables travaux, au premier rang desquels il faut citer ceux de M. Pierre Boutroux (*voir* particulièrement *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (Gauthier-Villars, 1908) et *Équations différentielles et fonctions multiformes* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1910).

De tels travaux avancent le problème de Géométrie ici considéré comme tout progrès effectué dans la théorie de l'équation de Riccati avancerait les nombreux problèmes géométriques qui conduisent à une telle équation.

Il faut cependant ajouter que c'est l'intégrale analy-

tique dans le champ complexe qui a été étudiée jusqu'ici, tandis qu'au point de vue géométrique il faudrait surtout connaître l'allure des courbes intégrales réelles.

6. Si $m = 1$, l'équation (6) peut s'écrire

$$-2\rho^2\, d\rho + \left[\rho \pm k\sqrt{f(\Phi)}\right] d\Phi = 0;$$

elle est donc de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}\, d\rho + \left(\rho + \frac{\partial F}{\partial \Phi}\right) d\Phi = 0.$$

Or, c'est là un type d'équations qui se rencontre assez fréquemment dans des questions de Géométrie et de Mécanique.

M. G. Darboux rencontre ce type en cherchant à réduire des différentielles linéaires à des formes canoniques simples (*Comptes rendus*, 15 novembre 1909). Dans un ordre d'idées qui, au fond, ne diffère pas du précédent, soit le système de deux équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Si l'on se propose de déterminer un changement de variables

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$

conservant la forme canonique, il faut, comme on sait, que

$$\xi\, d\eta - x\, dy$$

soit une différentielle exacte (H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 3).

Égalons cette expression à $dF(x, y)$ et identifions. Il viendra

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \xi \frac{\partial \eta}{\partial y} = x + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Éliminons ξ et nous obtenons pour déterminer η une équation aux dérivées partielles qui exige l'intégration de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \left(x + \frac{\partial F}{\partial y}\right) dy = 0.$$

Rapprocher toutes ces difficultés ne paraît cependant pas permettre de les éclairer notablement l'une par l'autre, mais, faute de pouvoir mieux faire, le rapprochement ne m'a pas semblé indigne d'être signalé.

7. *Retour sur les surfaces de révolution.* — J'ai terminé ma précédente Note par un théorème qui peut s'énoncer ainsi :

La surface de révolution

$$(7) \qquad r = A\Phi(z) + B\Phi(z)\int \frac{dz}{[\Phi(z)]^2}$$

est coupée, suivant ses asymptotiques, par les deux familles de conoïdes

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$$

qui ne dépendent en rien de A *et de* B.

En particulier on peut commencer par prendre $A = 1$, $B = 0$ et, par suite, à toute surface de révolution $r = \Phi(z)$, dont les conoïdes définissant les asymptotiques seront connus, on peut adjoindre, par une simple quadrature, d'autres surfaces de révolution coupées, suivant leurs asymptotiques, par les mêmes conoïdes. Je vais développer ces assertions sur quelques exemples.

Soit $\Phi(z) = z^m$. L'équation (7) devient

$$r = Az^m + \frac{B}{1-2m}\frac{1}{z^{m-1}}.$$

Pour $m = 2$, si l'on fait d'abord $A = 1$, $B = 0$, puis $A = 0$, $B = 1$, on trouve la parabole et l'hyperbole méridiennes

$$r = Az^2, \qquad rz = \text{const.}$$

donnant des surfaces de révolution dont les asymptotiques se projettent sur l'axe Oz au moyen des mêmes génératrices conoïdales.

Soit encore $\Phi(z) = \sqrt{z^2 + b^2}$. L'équation (7) devient

$$r = A\sqrt{z^2 + b^2} + \frac{B}{b}\sqrt{z^2 + b^2}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{b}.$$

Faisons d'abord $A = \frac{a}{b}$, $B = 0$, puis $A = 0$, $B = 1$. On conclut de là que l'hyperboloïde de révolution

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

et la surface

$$br = \sqrt{z^2 + b^2}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{b}$$

ont leurs asymptotiques sur les mêmes plans gauches passant par Oz.

8. *Cas du tore.* — Les lignes asymptotiques du tore dépendant, en général, des fonctions elliptiques, on possède, à leur sujet, peu de résultats élémentaires.

Aussi est-il intéressant d'appliquer à cette surface le théorème précédent qui l'associe immédiatement à d'autres dont les asymptotiques se trouvent du même coup. Si

$$\Phi(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2},$$

il faut d'abord calculer l'intégrale indéfinie

$$(8) \qquad \int \frac{dz}{(a + \sqrt{b^2 - z^2})^2}.$$

Posant pour abréger $c^2 = a^2 - b^2$ on trouve sans peine qu'elle est égale à

$$\frac{a}{c^2}\,\frac{z}{a+\sqrt{b^2-z^2}} + \frac{2b^2}{c^3}\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b-z}{b+z}}\right).$$

Formant alors l'équation (7) on voit que, pour $A = 1$, $B = 0$, on y retrouve le tore

$$(r-a)^2 + z^2 = b^2.$$

Pour $A = 0$, $B = \frac{c^2}{a}$, on a la surface

$$r = z + \frac{2b^2}{ac}(a+\sqrt{b^2-z^2})\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b-z}{b+z}}\right)$$

qui semble être la plus simple parmi celles dont les asymptotiques sont sur les mêmes conoïdes que les asymptotiques du tore précédent.

9. *Cas où $a = b$.* — Le tore est alors engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes. Alors l'intégrale (8) est égale à

$$\frac{2}{3a}\,\frac{1+3\sqrt{\frac{a-z}{a-z}}}{\left(1+\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}\right)^3}.$$

L'égalité (7) devient

$$r = A(a+\sqrt{a^2-z^2}) + B\,\frac{a+z}{3a}\,\frac{1+3\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}}{1+\sqrt{\frac{a-z}{a-z}}}.$$

Cette fois, pour $A = 0$, on trouve une courbe algébrique du troisième degré qui, en tournant autour de Oz, engendre une surface de révolution dont les asymptotiques se projettent conoïdalement sur Oz

tout comme celles du tore. Et il existe une double infinité de courbes *algébriques* ayant la même propriété.

[K¹1c]

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

PAR M. AURIC.

Soit le triangle de référence ABC : nous définirons le point P au moyen de ses coordonnées trilinéaires relatives à celles du centre de gravité G; en d'autres termes, nous admettrons que P est le point d'application de la résultante de trois forces parallèles F_A, F_B, F_C respectivement appliquées en A, B, C; ces forces (ou des expressions proportionnelles) seront les coordonnées de P [1].

F_A est une fonction quelconque des côtés a, b, c qui déterminent sans ambiguïté le triangle de référence

$$F_A = \varphi(a, b, c)$$

dont les coefficients sont des fonctions symétriques de a, b, c.

Pour que P soit un point *symétrique* du triangle, nous dirons que F_B et F_C doivent se déduire de F_A par permutation circulaire des éléments a, b, c :

$$F_B = \varphi(b, c, a), \qquad F_C = \varphi(c, a, b).$$

Les forces F_A, F_B, F_C étant données, on peut les per-

---

[1] Cette définition permet en quelque sorte une composition de divers points P_i par l'addition des forces correspondantes respectivement appliquées en A, B, C.

muter circulairement et obtenir ainsi deux nouveaux points P', P'' que nous appellerons les *permutants* de P :

P.....	F_A	F_B	F_C
P'.....	F_B	F_C	F_A
P''.....	F_C	F_A	F_B

Le triangle ou *triple point* $PP'P''$ jouit de nombreuses propriétés; il a le même centre de gravité que le triangle de référence et il est trihomologique à celui-ci.

Au moyen de la relation

$$c = 2p - a - b,$$

on peut mettre $\varphi(a, b, c)$ sous la forme $\psi(a, b)$

$$P..... \quad \psi(a, b) \quad \psi(b, c) \quad \psi(c, a)$$

d'où l'on peut déduire un point P_1 dit *associé* de P, soit un *double point* PP_1

$$P_1..... \quad \psi(a, c) \quad \psi(b, a) \quad \psi(c, b)$$

par permutation des deux côtés adjacents au sommet considéré.

Ce point associé P_1 possédera également deux permutants P'_1, P''_1 qui seront les associés de P', P''.

Lorsque l'associé P_1 se confond avec P, on dit que celui-ci est un *simple point;* dans ce cas, les coordonnées sont évidemment de la forme

$$\chi(a), \quad \chi(b), \quad \chi(c).$$

En particulier, au double point PP_1 correspond le simple point P_0 :

$$P_0..... \quad \psi(a, a) \quad \psi(b, b), \quad \psi(c, c)$$

et l'on démontre que le triangle $P_0 P P_1$ jouit de nom-

breuses propriétés; il a le même centre de gravité que le triangle de référence, et il est homologique à celui-ci.

Pour

$$\chi(a) = 1$$

P est le centre de gravité.

Pour

$$\chi(a) = a$$

P est le centre du cercle inscrit.

Pour

$$\chi(a) = a^2$$

P est le point de Lemoine (centre des symédiaires).

D'une manière générale, nous allons chercher le lieu des points

$$[f(a)]^n, \quad [f(b)]^n, \quad [f(c)]^n,$$

lorsque n varie.

Posons

$$f(a) = e^\alpha, \qquad f(b) = e^\beta, \qquad f(c) = e^\gamma;$$

il est évident que le lieu sera la courbe

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \mathrm{L}x \\ 1 & \beta & \mathrm{L}y \\ 1 & \gamma & \mathrm{L}z \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x^{\gamma-\beta} y^{\alpha-\gamma} z^{\beta-\alpha} = 1,$$

courbe qui est en général transcendante. Toutefois, si l'on a

$$[f(b)]^2 = f(a) f(c) \qquad \text{ou} \qquad 2\beta = \alpha + \gamma,$$

ce lieu sera une courbe algébrique

$$y^2 = xz.$$

Si la fonction $\chi(a)$ est rationnelle, on pourra la

mettre sous la forme d'un polynome entier $R(a)$ et d'une somme algébrique de fractions simples

$$\sum \frac{1}{a+\lambda}, \quad \sum \frac{1}{a^2+\lambda a+\mu}.$$

Le point

$$a+\lambda, \quad b+\lambda, \quad c+\lambda$$

se trouve aisément sur la droite joignant le centre de gravité au centre du cercle inscrit : le point

$$a^2+\lambda a+\mu, \quad b^2+\lambda b+\mu, \quad c^2+\lambda c+\mu$$

se déterminera facilement par la considération des deux points précédents et du point de Lemoine : il suffira donc de chercher les points inverses des points ainsi obtenus, ce qui ne présentera aucune difficulté (¹).

Considérons le double point

P.....	$\psi(b)$	$\psi(c)$	$\psi(a)$
P_1.....	$\psi(c)$	$\psi(a)$	$\psi(b)$

Pour $\psi(a)=a$ on a

II_1 (inverses des points de Jérabek).

Pour $\psi(a)=a^2$ on a

JJ_1 (inverses des points de Brocard).

D'une manière générale, on pourra comme précédemment chercher le lieu des points

$$[f(b)]^n, \quad [f(c)]^n, \quad [f(a)]^n,$$
$$[f(c)]^n, \quad [f(a)]^n, \quad [f(b)]^n,$$

(¹) Pour avoir l'inverse d'un point P on joint AP, BP, CP qui coupent BC, CA, AB en α, β, γ; on prend les symétriques α', β', γ' de ces points par rapport aux milieux de BC, CA, AB et l'on joint $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ qui se coupent en P′ inverse de P.

et l'on trouvera les courbes

$$x^{\beta-\alpha}y^{\gamma-\beta}z^{\alpha-\gamma}=1,$$
$$x^{\alpha-\gamma}y^{\beta-\alpha}z^{\gamma-\beta}=1.$$

Si la fonction $\psi(a)$ est rationnelle, on la réduira en éléments simples et l'on sera ramené à la considération des doubles points $I_1 I$, $J_1 J$, à l'aide desquels on pourra aisément déduire le double point cherché.

Observations. — Si l'on tient compte de la relation

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

la fonction $\psi(a, b, c)$ devient

$$\varphi(2R\sin A,\ 2R\sin B,\ 2R\sin C),$$

ce qui permet une autre définition des coordonnées du point P; elle ne diffère d'ailleurs de la précédente que pour la forme.

En particulier, les coordonnées du centre du cercle circonscrit seront

$$\sin 2A,\quad \sin 2B,\quad \sin 2C;$$

celles de l'orthocentre

$$\sin A\cos B\cos C,\quad \sin B\cos C\cos A,\quad \sin C\cos A\cos B.$$

On pourrait également définir F_A, F_B, F_C par une équation de la forme

$$\varphi(F_A, F_B, F_C;\ a, b, c)=0$$

et par les deux autres qui s'en déduisent par permutation circulaire.

On voit, par cette seule énumération, l'immense variété des points du triangle soi-disant remarquables et étiquetés trop souvent d'un nom propre à la façon des fossiles de la Paléontologie.

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Statique graphique, par M. *Carlo Bourlet*. Un volume in-8 de 156 pages, avec 90 figures. Paris, Hachette et Cie, 1910.

J'éprouve quelque embarras à dire tout le bien que je pense de ce Livre, dans un journal à la rédaction duquel nous collaborons, M. Carlo Bourlet et moi. Mais il serait fâcheux qu'un scrupule m'empêchât de signaler un Ouvrage tout à fait remarquable, qui apporte une véritable nouveauté dans l'enseignement de la Statique graphique.

Il se distingue par deux qualités qui sont rarement conciliées : l'excellence de l'exposition et le sens pratique. Trop souvent les théoriciens qui écrivent sur les Mathématiques appliquées se laissent glisser à l'abstraction, trop souvent les praticiens font connaître des résultats utiles dans un langage obscur. M. Bourlet a réussi à ordonner comme un Traité de Géométrie ou d'Algèbre un livre immédiatement applicable à la pratique industrielle. Les mathématiciens trouveront, en le lisant, la clarté et la rigueur qui leur sont justement chères, et les ingénieurs ne pourront y relever un seul développement spéculatif.

Ajoutons que l'Ouvrage pourrait être intitulé : *Éléments de Statique* tout court. L'auteur en effet ne fait appel à aucune connaissance préliminaire de la Mécanique, et son exposition part des principes. Les démonstrations des théorèmes fondamentaux relatifs à la composition et à la réduction des forces, aux lois de l'équilibre, sont faites *au moyen des constructions propres à la Statique graphique*. C'est un des traits les plus originaux du livre, où apparaît ainsi une remarquable unité de méthode.

Il convient d'entrer dans une analyse détaillée.

On trouve d'abord cinq pages de *Notions préliminaires* sur les vecteurs et leur addition géométrique.

Chapitre I. *Théorèmes généraux*. — Composition des

forces, équilibre d'un solide (dans le cas où les forces sont dans un plan). Ainsi que je le disais, l'auteur introduit le plus tôt possible le *dynamique* et le *funiculaire*, qui sont les instruments essentiels de la Statique graphique, et s'en sert pour les démonstrations. La composition des forces est faite par l'addition des vecteurs qui les représentent, et non au moyen du parallélogramme classique (je crois bien que l'expression de *parallélogramme des forces* n'est pas prononcée), qui n'est jamais employé pratiquement. On prend ainsi de bonnes habitudes dès le début [1].

Chapitre. II. *Forces parallèles, centres de gravité.* — Les lois de la composition des forces parallèles sont encore déduites de constructions de Statique graphique.

Chapitre III. *Couples, moments.* — Définition et composition des couples. Représentation graphique des moments. Théorème de Varignon. A noter un dernier paragraphe, très important, sur les questions d'échelles.

Chapitre IV. *Réactions aux appuis.* — Conditions d'équilibre d'un solide gêné, avec applications, d'un caractère déjà très pratique, à des poutres appuyées ou encastrées, à des fermes, à des consoles. A signaler deux paragraphes substantiels sur les lois du frottement et sur celles de la poussée du vent. Pour ces dernières, l'auteur a mis à profit les résultats des expériences les plus récentes : on sait combien les progrès de l'aviation ont profondément modifié nos idées sur la résistance de l'air.

Chapitre V. *Efforts tranchants, moments de flexion et de torsion.* — Les applications se multiplient et portent sur des poutres, sur des organes divers de machines. On étudie

---

[1] Il serait à désirer que le parallélogramme des forces disparût définitivement de l'enseignement de la Mécanique. Cette construction a sans doute l'avantage de rendre intuitif le fait que la composition des forces est une opération commutative, mais une fois qu'on le sait, à quoi bon encombrer indéfiniment les constructions de lignes inutiles? Autant vaudrait s'astreindre, chaque fois qu'on additionne deux nombres, à faire l'opération dans les deux sens, et à vérifier que $a+b=b+a$. Et encore il y a là un contrôle, sans raison d'être en Mécanique.

aussi les charges uniformément réparties. L'idée d'intégration, qui est naturellement au fond des choses, est introduite de la manière la plus habile, sans que l'exposition perde à aucun moment son aspect élémentaire.

Chapitre VI. *Systèmes triangulés.* — Méthodes de Cremona, de Culmann et de Ritter. Je parlerai seulement de la première. Elle conduit à des graphiques d'une grande élégance, mais où les débutants trouvent des difficultés : il ne faut pas se méprendre sur le sens des forces, les constructions doivent être conduites dans un ordre rigoureux. L'auteur a tenu à formuler des règles extrêmement précises dont l'application machinale suffit à prévenir toute erreur (j'ai vainement cherché ces règles dans les Ouvrages similaires). Il va de soi, si j'ai bien fait comprendre l'esprit du Livre, que ces règles sont justifiées par des raisonnements rigoureux, et n'apparaissent pas comme résultant d'un heureux empirisme.

Tel est cet Ouvrage qui, bien que borné aux parties les plus élémentaires de la Statique graphique, ne pourra manquer d'exercer une influence profonde sur l'enseignement de cette science. Et quand M. Bourlet publiera le Traité complet qu'il annonce dans sa Préface, nous pouvons être assuré qu'il nous donnera un Ouvrage classique.

R. B.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1910).

Sujets des compositions.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Dans un plan donné, il y a un infinité de cercles (Γ) *orthogonaux à tous les cercles* (C) *qui passent par deux points donnés* P, P′ *dans ce plan.*

A tout point M *correspond un point* M′ *tel que* M *et* M′

soient conjugués harmoniques par rapport à tout cercle (Γ).

Donner la construction géométrique de ces points.

1° *Trouver le lieu de* M *et* M′ *quand* MM′ *a une longueur donnée* l;

2° *Trouver le lieu de* M′ *quand* M *décrit une droite* (D). *On pourra supposer successivement que la droite* (D) *est perpendiculaire à* PP′, *qu'elle passe par l'un des point* P *ou* P′; *qu'elle rencontre* PP′ *en un point autre que* P *ou* P′, *étant oblique à* PP′ *et enfin que* (D) *est parallèle à* PP′;

3° *Lieu de* M′ *quand* M *décrit une parabole passant par* P *et* P′ *et dont l'axe est perpendiculaire à* PP′.

Dans chacun des cas examinés on étudiera le déplacement de M′, *celui de* M *étant supposé connu ;*

4° *On considère dans le plan donné un nombre quelconque de cercles* (C), *soient* (C_1), (C_2), ..., (C_p) *et autant de coefficients numériques donnés* a_1, a_2, ..., a_p; *puis* q *cercles* (Γ) : (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_q) *et des coefficients* α_1, α_2, ..., α_q. *Peut-on toujours déterminer, dans le plan donné, deux points* S_1, S_2, *tels que la somme des puissances d'un point quelconque* X *du plan par rapport à tous ces cercles, chaque puissance étant multipliée par le coefficient correspondant, soit égale à la somme des carrés des distances de ce point* X *aux deux points cherchés* S_1, S_2, *multipliée par la demi-somme des coefficients donnés ? En supposant que les cercles* (C) *et* (Γ) *appartiennent aux deux familles considérées, trouver les conditions pour que* S_1 *et* S_2 *soient deux points conjugués* M, M′.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On considère deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P *et* Q, *qui ont même axe et même sommet.*

1° *On demande de trouver toutes les droites* D *dont les conjuguées* D′ *et* D″ *par rapport à* P *et* Q *sont dans un même plan (on ne considère que des droites réelles situées à distance finie). Montrer que deux droites* D′ *et* D″ *qui correspondent à une même droite* D *sont à la même distance de l'axe des paraboloïdes, qu'elles font le même angle avec l'axe et que leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font un angle constant.*

2° *On considère une droite* D *particulière, que l'on désigne par* D_1; *on prend sa conjuguée* D_2 *par rapport au paraboloïde* P, *puis on prend la conjuguée* D_3 *de* D_2 *par rapport au paraboloïde* Q, *et ainsi de suite, de telle sorte qu'une droite* D_{2p} *soit conjuguée de la droite* D_{2p-1} *par rapport à* P *et qu'une droite* D_{2q+1} *soit conjuguée de la droite* D_{2q} *par rapport à* Q; *étudier la distribution de ces droites.*

3° *Une droite* D *se déplace en faisant un angle constant avec l'axe des paraboloïdes et de façon que les surfaces engendrées par* D′ *et* D″ *fassent un angle constant au point commun à* D′ *et* D″; *quelle surface engendre* D; *quelles surfaces engendrent* D′ *et* D″ *et quel est le lieu du point commun à* D′ *et* D″; *ce lieu peut-il être situé sur la surface engendrée par* D? (*On indiquera un mode de génération simple de ces diverses surfaces.*)

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

On considère la famille de surfaces du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{const.},$$

a, b, c étant des nombres positifs distincts et donnés, les axes de coordonnées étant rectangulaires : on désigne par (E) *l'équation aux dérivées partielles des surfaces* (S) *orthogonales à cette famille de surfaces du second degré et par* (γ) *les courbes caractéristiques de l'équation* (E) :

1° *Exprimer les coordonnées des points d'une surface* (S) *à l'aide de deux paramètres u et v; montrer qu'on peut adopter les expressions de la forme*

$$x = f(v)f_1(u), \qquad y = \varphi(v)\varphi_1(u), \qquad z = \psi(v)\psi_1(u),$$

et que la recherche des lignes asymptotiques de toute surface (S) *se ramène aux quadratures.*

2° *Quelle est la condition pour qu'une courbe imposée, distincte d'une caractéristique,*

$$x = f(v), \qquad y = \varphi(v), \qquad z = \psi(v),$$

soit ligne asymptotique d'une surface (S)?

La détermination des familles d'asymptotiques distinctes

des caractéristiques, des surfaces (S), *peut se ramener à la recherche des solutions de trois équations différentielles linéaires analogues.*

L'intégration de ces équations linéaires peut-elle se ramener aux quadratures?

Une famille d'asymptotiques a-t-elle une enveloppe?

Comment trouvera-t-on les surfaces (S) *dont une famille d'asymptotiques est douée d'enveloppe?*

Examiner les particularités de la surface et de ses asymptotiques dans le voisinage de l'enveloppe, en se bornant aux surfaces dont les coordonnées correspondent à des fonctions holomorphes; donner explicitement des exemples très simples.

3° *Déterminer les surfaces* (S) *dont les asymptotiques d'une famille sont des caractéristiques* (γ). *Définir géométriquement ces surfaces.*

4° *Soient* (S_1) *une surface* (S) *choisie et* (Γ_1) *les développables circonscrites à* (S_1) *le long des caractéristiques génératrices* (γ) *supposées non asymptotiques.*

On réalise une déformation déterminée de la surface (S_1) *de telle sorte que tout point* M *de cette surface décrive la génératrice rectiligne de la développable* (Γ_1) *tangente en ce point, et l'on désigne par* M_1 *la position de* M *après la déformation, par* (Σ_1) *la surface obtenue.*

Dans le cas particulier où l'on choisit le point M' *sur l'arête de rebroussement de la développable* (Γ_1), *on obtient une surface* (Σ_1) *particulière, soit* (Σ_0). *Montrer qu'au réseau tracé sur* (S_1) *par les courbes* (γ) *et leurs conjuguées, correspond sur* (Σ_0) *un réseau conjugué.*

5° *Déterminer les déformations* (S_1, Σ_1) *faisant correspondre une courbe* (γ) *de* (S_1) *et possédant la propriété précédente de la déformation* (S_1, Σ_0).

Montrer que ces déformations associent à toute surface (S_1) *une famille à un paramètre de surfaces* (Σ_1) *dont les asymptotiques se correspondent, exception étant faite pour certaines surfaces* (S_1) *particulières que l'on caractérisera.*

Trouver celles de ces familles Σ_1 *dont les lignes asymptotiques correspondent aux asymptotiques de la surface* (S_1) *initiale et les définir géométriquement.*

N. B. *On rappelle que l'équation différentielle des lignes asymptotiques, en coordonnées curvilignes, est*

$$\begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} du^2 + 2 \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} du\,dv + \begin{vmatrix} x''_{v^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{v^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{v^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

MÉCANIQUE.

Mouvement d'un corps solide pesant fixé par un de ses points O *autour duquel il peut tourner librement et assujetti à toucher un plan horizontal fixe* H; *les liaisons sont supposées sans frottement et le solide au-dessus du plan* H.

I. *Le solide est de révolution, généralement non homogène, et est suspendu par un point de son axe de figure.*

a. Trouver les équations du mouvement et indiquer les circonstances générales de ce mouvement lorsque les conditions initiales sont arbitraires.

Discuter complètement lorsque le solide est abandonné sans vitesses initiales; examiner les cas particuliers dans lesquels le solide admet, soit un plan passant par l'axe de figure, soit un plan mené par O *et perpendiculairement à cet axe, comme plan de symétrie de masses; indiquer nettement, par des figures, la nature du mouvement du point de contact du solide sur le plan* H.

b. Lorsque l'axe de figure du solide est axe de symétrie des masses, discuter le mouvement, les conditons initiales étant arbitraires; examiner le cas particulier où le solide est homogène.

Application. — *Le mouvement instantané du solide est une rotation que l'on peut toujours décomposer en une rotation, soit* ω, *portée par l'axe du solide et en une rotation verticale.*

On suppose, en se plaçant dans le cas (*b*), *que les conditions initiales vérifient la relation*

$$2T = C\omega^2,$$

$2T$ *étant la force vive,* C *le moment d'inertie du solide par rapport à son axe.*

Calculer explicitement le mouvement, noter ses particularités et indiquer, dans les deux cas possibles, comment ce mouvement peut être imprimé au solide.

II. *Le solide ayant une forme quelconque, on désigne par* (Γ) *la courbe située sur le solide et lieu des points de contact* M *avec le plan* H; *on exprime les coordonnées, par rapport aux axes principaux d'inertie relatifs au point fixe* O, *d'un point quelconque de cette courbe à l'aide d'un paramètre u et l'on définit la position du solide à l'aide du paramètre u et de l'orientation du plan vertical passant par* OM.

Trouver les équations donnant ces paramètres et indiquer les circonstances générales du mouvement.

On pourra attacher au solide, en tout point M *de la courbe* (Γ), *un trièdre auxiliaire* (T) *ayant comme arête la normale en* M *à la surface du solide, l'une des faces passant par le point fixe* O; *et regarder le mouvement du solide comme résultant d'un mouvement relatif par rapport au trièdre* (T) *et d'un mouvement d'entraînement de ce trièdre.*

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVES THÉORIQUES. — I. *Exposer sommairement les questions suivantes :*

1° *Définition du vecteur tourbillon (ou rotation moyenne) en un point d'un milieu continu en mouvement.*

Propriété relative à la distribution géométrique de ce vecteur à un instant donné.

La distribution dans le temps et dans l'espace dans tous les cas où il existe une fonction des accélérations : théorèmes d'Helmholtz et de Lagrange.

2° *Vibrations adiabatiques des gaz; calcul de la vitesse du son dans l'air.*

II. *Plusieurs points matériels sont supposés :*

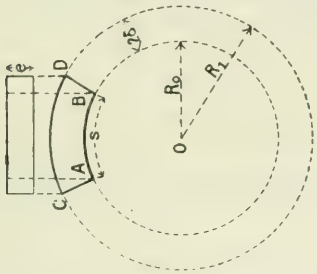
1° *Liés entre eux de manière que leur figure demeure toujours semblable à sa forme initiale;*

2° *Soumis à des formes mutuelles proportionnelles aux masses et à la distance.*

Étudier le mouvement de ce système.

Épreuves pratiques. — I. *Un cylindre pesant mobile autour d'un axe horizontal* O *et de rayon* R_0 *est en équilibre stable* (*fig.* 1).

Fig. 1.



Dans cette situation d'équilibre on rapporte sur sa surface latérale un patin prismatique homogène de masse m admettant comme plan de symétrie le plan vertical passant par l'axe horizontal O.

Les dimensions du patin sont connues et désignées par : ρ, *rayon moyen;* s, *l'arc de base sur le cylindre;* 2δ, *hauteur radiale de la couronne cylindrique dans laquelle est logé le patin;* e, *dimension de ce prisme comptée parallèlement aux génératrices du cylindre, c'est-à-dire à l'axe* O.

Calculer :

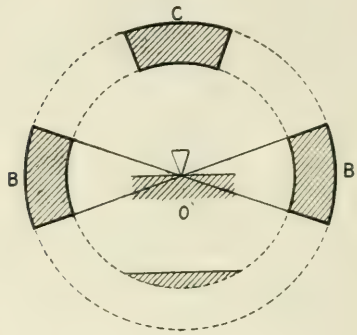
1° *Le moment d'inertie* mK^2 *du patin par rapport à l'axe* O *du cylindre;*

2° *La distance* ξ *du centre de gravité du patin à l'axe* O.

II. *Une roue cylindrique, lestée de manière à pouvoir osciller sur un couteau d'acier dont l'arête coïncide avec*

l'axe du cylindre, est munie de trois patins égaux vissables sur le pourtour plein de la roue; les patins opposés BB *sont de niveau dans la position conservée de l'équilibre du cylindre (avec ou sans patins) tandis que le patin* C *est à*

Fig. 2.



angle droit des patins B *et par conséquent appuyé sur la génératrice de faîte du cylindre lors de sa position d'équilibre (fig. 2).*

Les six vis des patins sont doublées par des vis de même terminaison mais réduites en longueur de manière à reproduire les parties des premières vis logées hors de l'écrou du patin lorsque les patins sont réunis à la roue.

Les dimensions de la roue primitive et de ses patins sont, avec les notations précédentes :

$$R_0 = 1^m,00, \quad \delta = 0^m,05, \quad s = 0^m,30, \quad e = 0^m,06, \quad \rho = 1^m,05.$$

La roue oscillant sans ses patins mais avec les vis raccourcies en place, on a compté par heure 2616 *petites oscillations simples; la roue oscillant avec ses patins, on a compté* 2512 *oscillations simples :*

1° *Calculer le moment d'inertie* A *et le moment maximum* MgL *du poids de la roue dans son premier état de mouvement;*

2° *En supposant les patins exactement mesurés, quelle est l'approximation des résultats du calcul.*

(Juillet 1909.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Mouvement d'un solide homogène de révolution pesant dont deux points, pris sur son axe symétriquement par rapport à son centre de gravité, sont assujettis à se déplacer sans frottement dans deux plans verticaux rectangulaires fixes.*

Étudier la forme de la projection horizontale, de la trajectoire du centre de gravité.

Épreuve pratique. — *Tous les points d'un cylindre homogène et de révolution non pesant sont attirés par un plan fixe* P *proportionnellement à la masse et à la distance. Sous l'action de ces forces, le cylindre qui n'est soumis à aucune liaison prend un mouvement dans lequel on a l'intégrale des forces vives*

$$T - U = h.$$

Calculer explicitement la constante h au moyen des données suivantes :

La hauteur, le rayon et la densité du cylindre sont respectivement $2a$, α, ρ.

A l'instant initial, le cylindre est incliné à 45° *sur le plan* P *et l'une de ses bases est tangente à ce plan en un point* F.

Le mouvement initial du cylindre se compose de deux rotations rectangulaires ayant même grandeur ω, *la première ayant lieu autour de la tangente en* F *à la circonférence de la première base et la seconde ayant lieu autour du diamètre perpendiculaire de la seconde base.*

On désignera par K *l'attraction du plan* P *sur l'unité de masse placée à l'unité de distance.*

(Juin 1909.)

Caen.

Épreuve théorique. — *Une plaque rectangulaire homogène, pesante et d'épaisseur négligeable,* ABCD, *peut tourner librement autour d'un axe horizontal* Ox, *confondu avec le côté* AB. *L'axe* Ox *est invariablement lié à un solide pesant,* S, *qui peut tourner librement autour d'un axe vertical fixe,* Oz_1, *rencontrant l'axe* Ox *au point* O, *milieu de* AB :

1° *Les liaisons étant supposées sans frottement, et les conditions initiales étant quelconques, étudier le mouvement du système. Indiquer, en particulier, si le mouvement de la plaque autour de* Ox *est oscillatoire ou révolutif.*

2° *Déterminer les conditions à remplir pour que, pendant tout le mouvement, la plaque fasse un angle constant avec la verticale; calculer cet angle et reconnaître si le mouvement correspondant est stable ou instable.*

On pourra lier à la plaque ABCD *un système d'axes rectangulaires constitué à l'aide de l'axe de rotation* Ox *et de la normale* Oz; *on définira la position du système à l'aide de l'angle* φ *dont tourne le solide* S *autour de* Oz_1, *et de l'angle* θ *que fait le plan de la plaque avec la verticale ascendante* Oz_1.

Épreuve pratique. — *Une barre homogène pesante, de longueur* $2d$ *et de densité* 1, *est suspendue par l'un de ses points* A *à un point fixe* O *à l'aide d'un fil de longueur* l. *On néglige la masse du fil et la section droite de la barre :*

1° *Trouver les équations définissant les petits mouvements dans le voisinage de la position d'équilibre stable, la barre restant dans un plan vertical passant par* O.

2° *Déterminer explicitement ces petits mouvements pour*

$$l = 2a, \qquad d = a\sqrt{6},$$

a désignant la distance du point d'attache A *au milieu* G *de la barre.*

Le système pourrait-il servir à mesurer le temps, et quelles seraient à ce point de vue ses relations avec le pendule simple de longueur $a = AG$?

3° *On suppose que le point* A *coïncide avec le point* G, *et l'on demande de déterminer les mouvements ayant lieu dans un plan vertical passant par* O, *et pour lesquels le fil reste voisin de la verticale.*

Existe-t-il dans ce cas des positions d'équilibre stable ?

On pourra désigner par θ *l'angle du fil avec la verticale descendante, par* φ *l'angle de la direction de la barre avec la même verticale, et calculer la force vive du système par le théorème de König.*

(Juin 1909.)

Clermont-Ferrand.

Epreuve théorique. — *Une barre homogène pesante,* AB, *glisse sans frottement dans un plan vertical* xOy. *Un fil inextensible et de masse négligeable relie le point fixe* O *au milieu de la barre. Trouver le mouvement de la barre et la tension du fil.*

Épreuve pratique. — *Un paraboloïde de révolution est engendré par une parabole de paramètre* p. *A une distance* h *du sommet on mène un plan perpendiculaire à l'axe; on considère le volume homogène découpé par ce plan dans le paraboloïde :*

1° *Évaluer ce volume;*

2° *Rayons de giration de ce volume par rapport à l'axe et par rapport à une perpendiculaire à l'axe menée par le sommet.*

Calcul numérique : $p = 4,5$; $h = 11$.

(Juin 1909.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Un solide* S *peut tourner autour d'un axe vertical* Oz. *Il est traversé par un canal rectiligne* OC *infiniment étroit rencontrant l'axe* Oz *en* O *et dans lequel se meut un point matériel pesant* M. *Les liaisons sont sans frottement :*

1° *Trouver le mouvement du système en supposant que* S *tourne librement autour de* Oz.

2° *Trouver le mouvement du point en supposant qu'on oblige* S *à tourner uniformément autour de* Oz.

Après avoir trouvé les équations différentielles des deux problèmes et poussé leur intégration aussi loin que possible, on cherchera, dans les deux cas, le sens du mouvement initial de M *sur* OC *en supposant qu'à l'instant initial la vitesse absolue de* M *soit perpendiculaire à* OM; *on laissera de côté toute autre discussion.*

Épreuve pratique. — *Une plaque homogène de masse* m *a la forme d'un triangle équilatéral de côté* a :

1° *Calculer le moment d'inertie* I *de la plaque par rapport à l'un de ses côtés et déterminer l'ellipsoïde central d'inertie.*

2° *Deux des sommets étant fixés sur une même verticale* Oz, *déterminer le mouvement de la plaque en admettant qu'elle est soumise à un couple résistant, dont le moment, parallèle à* Oz, *a une intensité constante* N, *et en admettant en outre que chaque élément infiniment petit ds de sa surface est soumis à une force résistante, qui lui est perpendiculaire, et qui est proportionnelle au carré de la vitesse* v; *l'intensité de cette force sera représentée par* $k^2 v^2 ds$, k *étant constant.*

L'équation différentielle à laquelle on parvient est, en désignant par ω *la vitesse de rotation de la plaque,*

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda(\alpha^2 + \omega^2). \tag{1}$$

On calculera λ *et* α *en fonction des données précédentes, mais on fera usage de la forme réduite* (1) *pour l'intégration.* (Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — *Soient* $Ox_1y_1z_1$ *et* $Oxyz$ *deux trièdres trirectangles de même sommet* O, *et* p, q, r *les projections sur* Ox, Oy, Oz *de la rotation instantanée dans le mouvement du second trièdre par rapport au premier. Établir les formules qui donnent* p, q, r *en fonction des angles d'Euler* ψ, θ, φ *caractérisant la position de* $Oxyz$ *par rapport à* $Ox_1y_1z_1$ *et des dérivées* ψ', θ', φ' *de ces angles par rapport au temps.*

Problème. — *Une plaque circulaire homogène infiniment mince est assujettie aux liaisons suivantes :* 1° *son centre* O *est fixe;* 2° *l'un de ses diamètres* Ox *est assujetti à rester perpendiculaire à un axe fixe* Oz_1. *Aucune force donnée n'agit sur la plaque et il n'y a pas de frottement.*

I. *Déterminer le mouvement de la plaque.* (*Intégrer autant que possible; inutile de discuter.*)

II. *Déterminer un couple tel qu'en l'appliquant à la plaque tout en supprimant la liaison* 2°, *sans changer la première et sans modifier les conditions initiales, le mouvement reste le même.*

Notations : M *masse,* R *rayon de la plaque. Soient* Oy

le diamètre de la plaque perpendiculaire à Ox, Oz *la normale à la plaque,* Ox_1, Oy_1 *des axes fixes formant avec* Oz_1 *un trièdre trirectangle. On prendra pour paramètres les angles*

$$\widehat{z_1 O z} = \theta, \qquad x_1 O x = \psi.$$

Épreuve pratique. — *Une demi-circonférence homogène de diamètre* AB *de milieu* C *a pour masse* M, *pour rayon* R.

Déterminer : 1° son centre de gravité; 2° son moment d'inertie I *par rapport à l'extrémité* A.

La circonférence, étant placée dans un plan vertical et pouvant tourner autour du point A *supposé fixe, constitue un pendule composé.*

3° *Calculer la durée des petites oscillations de ce pendule.*

4° *Déterminer les projections horizontale et verticale de la réaction du point fixe* A *lorsque le pendule passe la première fois par la position où* AB *est verticale, après avoir été abandonné sans vitesse dans la position où* AB *est horizontale et* C *en dessous de cette droite.*

(Juillet 1909.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *Le mouvement d'un trièdre mobile* $Oxyz$ *est défini à un instant* t *par les projections, sur ses arêtes, de la translation instantanée de l'origine et de la rotation instantanée :*

$$u = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2t^2}, \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

$$p = \frac{1}{1 + 2t^2}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{1 + 2t^2}.$$

Déterminer la trajectoire du sommet O *du trièdre.*

II. *Dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe* O, *à un instant* t, *la vitesse instantanée de rotation est un vecteur* $O\Omega$ *et le moment cinétique résultant par rapport à* O *un vecteur* $O\sigma$:

1° $O\sigma$ *est perpendiculaire au plan conjugué de* $O\Omega$ *par rapport à l'ellipsoïde d'inertie relatif à* O;

2° *Le moment résultant des forces d'inertie a pour mesure le double de l'aire du triangle* $\Omega O \sigma$, *si* $O\Omega$ *est fixe;*

3° *L'énergie cinétique du corps est* $\frac{1}{2} O\Omega . O\sigma \cos \widehat{\Omega O \sigma}$;

4° *Le corps n'étant soumis à aucune force active donnée, le point* Ω *partira suivant la direction conjuguée du plan* $\Omega O \sigma$ *par rapport à l'ellipsoïde d'inertie;*

5° *Le moment cinétique résultant par rapport à une droite quelconque* OL, *de cosinus directeurs* α, β, γ, *ayant été calculé, on supposera que l'axe* OL *est subitement fixé à l'instant* t, *et l'on déterminera la nouvelle vitesse angulaire autour de* OL, *ainsi que la perte de force vive.*

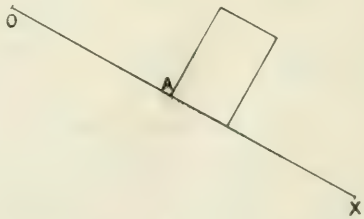
Épreuve pratique. — *Un cylindre circulaire droit de* $0^m,10$ *de rayon, de* $0^m,20$ *de hauteur, est terminé par un hémisphère de même rayon, et peut osciller autour d'un diamètre de la base plane, fixé horizontalement. La matière qui le constitue est homogène et de densité* 1. *L'axe de figure, écarté de* 60° *sur la verticale descendante, est abandonné sans vitesse.*

Au bout de quel temps sera-t-il incliné pour la première fois de 30° *sur cette verticale?*

(Juin 1909.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Dans un plan vertical, sur une droite fixe* OX *faisant avec l'horizontale un angle* α *dont la tangente est* 0,4, *est placée une plaque rectangulaire*



pesante et homogène qui est attachée au point fixe O *par un fil élastique* OA *dont on néglige la masse. Ce fil s'allonge proportionnellement à sa tension; sa longueur*

naturelle a doublerait sous une tension égale au poids de la plaque.

Le coefficient de frottement est 0,1.

Primitivement le système est sans vitesse et le fil est à l'état naturel.

Trouver le mouvement du système.

Quel doit être le rapport de la base à la hauteur de la plaque pour que le système ne bascule pas.

SOLUTION.

Première partie du mouvement : en posant $OA = x$

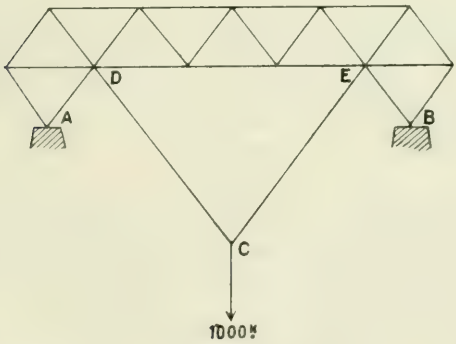
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a - 0,3a\cos\alpha) = 0,$$

$$x = a + 0,3a\cos\alpha\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right),$$

$$v = 0,3a\cos\alpha\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t.$$

Le mouvement cesse au temps $t_1 = \pi\sqrt{\frac{g}{a}}$, alors

$$x_1 = a + 0,6a\cos\alpha.$$



Deuxième partie du mouvement : il n'y a pas équilibre en x_1 et les forces en jeu tendent à faire remonter le mobile. On a la nouvelle équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x - a - 0,3a\cos\alpha) = 0.$$

On en tire un nouvel arrêt après un nouveau temps t_1 et l'on vérifie qu'il y a équilibre.

Épreuve pratique. — *Un système articulé conforme à la figure précédente est formé de tiges qui ont toutes* 1^m *de longueur à l'exception des tiges* CD *et* CE *qui ont* 3^m *de long.*

Ce système repose par A *et* B *sur deux appuis fixes situés dans un même plan horizontal.*

En C *on applique un poids de* 1000^{kg}, *trouver les tensions des tiges.*

On néglige le poids des tiges.

Le système est dans un plan vertical.

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — *Un corps solide peut tourner autour d'un axe vertical* Oz.

Dans ce corps est creusé un canal circulaire vertical de centre A *dont le plan est perpendiculaire au plan* AOz.

Dans ce canal peut se mouvoir un point pesant P *de masse* m.

La distance de A *à* Oz *est égale au rayon* R *du canal et le moment d'inertie du corps solide par rapport à* Oz *est égal à* $2mR^2$.

Primitivement le système est immobile et le point P *est situé à l'extrémité du diamètre horizontal du canal.*

Trouver le mouvement de ce système.

Évaluer en degrés l'amplitude du déplacement du corps solide.

SOLUTION.

Prenons Oz dirigé vers le bas, Ox et Oy perpendiculaires à Oz. En désignant par ψ l'angle de OA avec Ox, par θ l'angle de AP avec l'horizontale, par x, y, z les coordonnées de P, on a

$$x = R\cos\psi - R\cos\theta\sin\psi,$$
$$y = R\sin\psi + R\cos\theta\cos\psi,$$
$$z = R\sin\theta.$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz donne

$$I\psi' + mR^2(1+\cos^2\theta)\psi' - mR^2\sin\theta\theta' = 0$$

ou

$$(1) \qquad (3 - \cos^2\theta)\psi' - \sin\theta\theta' = 0.$$

Le théorème des forces vives donne

$$I\psi'^2 + mR^2(1 + \cos^2\theta)\psi'^2 + mR^2\theta'^2 - 2mR^2\sin\theta\theta'\psi' = 2mgR\sin\theta$$

ou

$$(2) \qquad (3 + \cos^2\theta)\psi'^2 - 2\sin\theta\theta'\psi' + \theta'^2 = 2\frac{g}{R}\sin\theta.$$

De (1) et (2) on tire

$$(3) \qquad \theta'^2 = \frac{g}{R}\,\frac{3 + \cos^2\theta}{1 + \sin^2\theta}\sin\theta.$$

On voit que θ varie de o à π dans un temps fini et que, par suite, le point P exécute sur le canal des oscillations périodiques entre les deux extrémités du diamètre horizontal.

D'autre part, (1) donne pour l'amplitude de ψ et en posant $\cos\theta = u$,

$$\sqrt{3}\,\psi = \left(\text{arc tang}\,\frac{u}{\sqrt{3}}\right)_{-1}^{+1} = 60^\circ,$$

$$\psi = 34^\circ.$$

Épreuve pratique. — *Trouver les axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au sommet d'un parallélépipède droit à base rectangle de masse* 1 *et de côtés* 1, 2, 3.

(Juin 1909.)

Montpellier.

Epreuve théorique. — *On considère une ellipse dont l'un des axes est horizontal et l'autre vertical. Un point pesant, placé en un sommet de l'axe horizontal, du côté de la concavité, est lancé sur la courbe avec une vitesse initiale v_0 dirigée suivant la verticale ascendante :*

1° *Examiner si le mobile quitte l'ellipse et, dans le cas où cela arrive, former l'équation qui détermine le point où se fait la séparation.*

2° *Si le mobile quitte l'ellipse, il se meut ensuite suivant une parabole. Peut-on choisir la vitesse initiale de manière que cette parabole passe par le centre de l'ellipse ?*

Épreuve pratique. — Ox, y, z *étant des axes rectangu-*

laires, on considère un solide homogène pesant, situé dans l'angle trièdre formé par les directions positives des axes, et limité par les surfaces

$$x^2 + 9z^2 = 9, \qquad y^2 + 4z^2 = 4.$$

On suppose que ce solide oscille, comme un pendule composé, autour de la droite $z = 0$, $2x - 3y = 0$, *prise comme axe de suspension, et l'on demande quelle est la longueur du pendule simple synchrone.*

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — *Deux points matériels* M *et* M′, *de masses* m *et* m', *se meuvent sans frottement sur un plan horizontal fixe. Ils sont reliés par un fil élastique dont la longueur naturelle est* a, *et dont la tension est* $\frac{\lambda mm'}{m+m'}(r-a)$, *où* λ *est une constante donnée, lorsque sa longueur devient* $r (r > a)$. *Étudier le mouvement des deux points.*

Considérer, en particulier, le cas où, à l'instant initial, le fil a pour longueur $2a$, *le point* M *est immobile et le point* M′ *est animé d'une vitesse donnée* v, *perpendiculaire à la droite* MM′. *S'il arrive que le fil reprenne sa longueur naturelle, on ne poursuivra pas l'étude du mouvement. Cas où* $v = 0$.

Épreuve pratique. — *Un losange articulé, formé par quatre tiges homogènes, est mis en mouvement par une percussion donnée, normale à l'un de ses côtés, et située dans son plan. Trouver le mouvement initial.*

(Juillet 1909.)

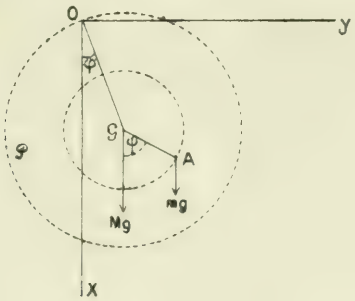
Nancy.

Épreuve théorique. — *Une plaque circulaire homogène pesante* P, *de masse* M, *de rayon* R, *est assujettie à tourner autour d'un axe fixe horizontal* Oz *normal à son plan en un point donné* O *de sa circonférence.*

Un point matériel pesant A, *de masse* m, *est assujetti à rester à l'intérieur ou sur la circonférence* (C) *d'un cercle de rayon* $\frac{R}{2}$ *ayant même centre* G *que la plaque* P *et tracé sur cette plaque* P.

A l'instant initial $t = 0$ *le système, après avoir été écarté de sa position d'équilibre* [P *en* P_0 *et* A *en* A_0 *sur* (C)], *est abandonné, sans vitesse initiale, à l'action de son poids.*

On prendra pour paramètres définissant la position du



système les angles φ *et* ψ *que font, à l'instant* t, OG *et* GA *avec la nadirale menée par* O.

On demande :

1° *D'écrire les équations différentielles du mouvement du système en appliquant la méthode de Lagrange;*

2° *D'écrire ces mêmes équations en appliquant les théorèmes généraux;*

3° *D'intégrer ces équations en supposant que les angles* φ_0 *et* ψ_0 (*à* $t = 0$) *sont très petits et que, dans cette hypothèse, on néglige, dans les équations différentielles, les termes contenant les carrés ou produits de* φ, ψ, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$; *montrer que* φ *et* ψ *sont alors de la forme*

$$\varphi = A\cos\alpha t - B\cos\beta t, \qquad \psi = C\cos\alpha t - D\cos\beta t,$$

où A, B, C, D, α, β *sont des constantes par rapport à* t;

4° *D'effectuer les calculs pour*

$$\varphi_0 = 6^\circ \qquad \text{et} \qquad \psi_0 = 15^\circ,$$

c'est-à-dire d'exprimer, dans cette hypothèse, A, B, C, D, α *et* β *au moyen de* g, R, M *et* m;

5° *De dire quand le mouvement est périodique et d'évaluer alors la* période *dans le cas* 4°;

6° *D'évaluer, dans tous les cas, au moyen de* φ, ψ *et de*

leurs dérivées par rapport à t, la pression exercée par le point A *sur* (C);

7° *D'évaluer cette pression dans les cas particuliers* 3° *et* 4° *et de montrer que, dans ces cas, le mobile* A *ne quitte pas la circonférence* (C).

(Juin 1908.)

Épreuve théorique. — *Un corps solide homogène, non pesant, dont la masse est représentée par* 35, *a la forme d'une sphère de rayon* R *et peut tourner librement autour d'un point* O *de sa surface supposé fixe. Au centre* G *de la sphère est appliquée une force attractive, émanant d'un point fixe* P *distant du point* O *d'une longueur égale à* R *et ayant pour intensité* $\frac{\mu^2}{PG^3}$, μ *désignant une constante. Trouver le mouvement du solide, en supposant que le rayon* OG *soit d'abord incliné de* 60° *sur la direction fixe* OP *et que la sphère soit alors en rotation instantanée autour de ce rayon avec une vitesse angulaire égale à* $\frac{\mu\sqrt{5}}{R^2\sqrt{2}}$. *Déterminer la courbe décrite par le centre de la sphère.*

(Octobre 1908.)

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *Théorème du moment des quantités de mouvement des systèmes.*

II. *Un cylindre de révolution tourne librement autour de son axe horizontal. Il est muni d'un modérateur à ailettes, symétrique par rapport à l'axe, et dont le mouvement produit une résistance ayant par rapport à l'axe un moment proportionnel au carré de la vitesse de rotation.*

Sur le cylindre est enroulé un fil dont la masse et l'épaisseur sont négligeables. L'une des extrémités du fil est attachée au cylindre, l'autre se déroule verticalement et supporte un poids P.

Étudier le mouvement du système.

Épreuve pratique. — *Trouver les moments principaux d'inertie d'un cône droit, homogène par rapport au centre de gravité. On désignera par h la hauteur du cône, par a le rayon de la base.*

Pour quelle valeur du rapport $\frac{h}{a}$ *l'ellipsoïde central d'inertie est-il une sphère?*

(Novembre 1908.)

Épreuve théorique. — I. *Établir les équations fondamentales de l'Hydrostatique. Discussion.*

II. *Un écrou pesant se meut sans frottement sur une vis inclinée d'un angle* α *sur l'horizon.*

Le centre de gravité de l'écrou est en dehors de l'axe de la vis.

Étudier et discuter les différentes circonstances du mouvement.

Épreuve pratique. — *Une plaque pesante homogène, d'épaisseur négligeable, est mobile sans frottement autour d'un axe incliné de* 45° *sur l'horizon.*

La plaque a la forme d'un trapèze isoscèle; l'une des bases, fixée à l'axe, a 1^m *de long, l'autre* $0^m,50$. *La hauteur est de* $0^m,50$.

Déterminer la durée des petites oscillations de la plaque sous l'influence de la pesanteur.

On donne

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

(Juin 1909.)

Toulouse.

Épreuve théorique. — I. *Un fil sans masse est enroulé sur un cercle homogène de rayon* R, *et son extrémité libre est fixée en un point* O *d'un plan horizontal sur lequel le cercle posé à plat peut glisser sans frottement.*

Mouvement du système, le fil étant supposé tendu. (On ne considérera que la période du mouvement pendant laquelle le fil n'est pas entièrement déroulé.)

II. *Un corps solide étant rapporté à trois axes rectangulaires, on connaît à l'instant actuel les vitesses de trois points du corps :*

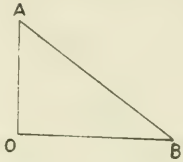
La vitesse du point de coordonnées 0, 0, 0 *a pour composantes* 2, 1, — 3;

La vitesse du point de coordonnées 1, 1, 0 *a pour composantes* 0, 3, — 1;

La vitesse du point de coordonnées 1, 1, 1 *a pour composantes* —1, 2, —1.

Trouver les éléments actuels du mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire l'axe instantané de rotation et de glissement, la grandeur de la rotation, la grandeur du glissement.

Épreuve pratique. — *Un triangle matériel, homogène, pesant,* OAB, *est rectangle en* O; *les longueurs des côtés sont :* OA = 3, OB = 4. *La masse totale est égale à l'unité.*



Déterminer la direction des axes principaux d'inertie au point O, *et calculer les moments principaux d'inertie en ce point.* (Juillet 1908.)

Épreuve théorique. — I. *Un trièdre trirectangle* (T) (Ox, Oy, Oz) *se meut dans le trièdre trirectangle* (T_1) *de façon que l'origine* O *se déplace dans le plan* ($x_1O_1y_1$) *et que deux points invariables de l'axe* Oz *se déplacent respectivement dans les plans* ($y_1O_1z_1$), ($z_1O_1x_1$); *on demande :*

1° *De calculer les expressions les plus générales des éléments instantanés (translation et rotation) du mouvement de* (T);

2° *De montrer que* Oz *demeure constamment normal à une surface;*

3° *De déterminer les conditions à ajouter pour que la trajectoire d'un point invariable, donné, de l'axe* Oz *soit une circonférence.*

II. *Une circonférence matérielle homogène de masse* M *et de rayon r porte un anneau très petit de même masse qui peut glisser en frottant le long de la courbe (coefficient de frottement* $f = \tang \alpha$) :

1° *On demande d'étudier le mouvement du système lancé dans un plan* vertical *et soumis à l'action de la pesanteur;*

2° *Mouvement relatif de l'anneau et de la circonférence.*

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un disque circulaire, homogène, pesant, est attaché par son centre* C *à une extrémité d'une barre pesante, homogène,* OC, *dont l'autre extrémité* O *est fixe. La barre peut tourner autour de* O, *le disque peut tourner autour de* C, *et le système tout entier reste contenu dans un plan vertical fixe.*

Masse du disque : M; *rayon du disque :* $a\sqrt{2}$; *masse de la barre :* 3M; *longueur de la barre :* $2a$. *On suppose* $\frac{g}{a} = 5$, g *étant l'accélération de la pesanteur.*

A l'instant initial, la barre est horizontale et sans vitesse, le disque est animé d'une vitesse de rotation de ω_0 :

1° *Trouver le mouvement du système; indiquer comment on calculerait les réactions qui s'exercent en* O *et en* C.

2° *Au moment où la barre passe par la verticale, le disque se trouve subitement lié à la barre d'une façon invariable par une liaison nouvelle. Trouver le nouveau mouvement que prendra la barre, et indiquer les valeurs de* ω_0 *pour lesquelles ce mouvement sera révolutif, ou oscillatoire, ou bien s'arrêtera complètement.*

II. *Le mouvement d'un système à liaisons complètes étant défini par l'équation*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\cos x - a)\sin x,$$

où a *désigne un nombre positif donné, trouver les positions d'équilibre stable, et la durée des petites oscillations autour de ces positions, suivant les différentes valeurs de* a.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène a la forme d'un triangle rectangle* AOB *rectangle en* O. *On donne* $OA = a$, $OB = b$ *et l'on mène par* O *une droite parallèle à l'hypoténuse.*

Déterminer sur cette droite le point M *pour lequel elle est axe principal d'inertie, et calculer les moments principaux en ce point.*

(Juillet 1909.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2128.

(1909, p. 192.)

D'un point P *on mène les trois normales à une parabole: soient* α, β, γ *les centres de courbure situés sur ces trois normales.*

De chacun des points α, β, γ *on peut mener une autre normale à la parabole. Démontrer que ces trois droites concourent.* (Georges CUNY.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois normales à la parabole soient concourantes est que la somme de leurs coefficients angulaires

$$m_1 + m_2 + m_3$$

soit nulle.

Si μ_1, μ_2, μ_3 sont les coefficients angulaires des normales simples issues de α, β, λ, on a

$$2m_1 + \mu_1 = 0, \qquad 2m_2 + \mu_2 = 0, \qquad 2m_3 + \mu_3 = 0:$$

d'où

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. BARISIEN et GIRAUDON.

2130.

(1909, p. 248.)

On donne un carré ABCD *et un cercle concentrique à ce carré. Pour chaque point* M *de ce cercle, on a*

$$\overline{MA}^{2n} + \overline{MB}^{2n} + \overline{MC}^{2n} + \overline{MD}^{2n} = \text{const.},$$

n étant l'un des nombres 1, 2 *ou* 3 [1].

(E.-N. BARISIEN.)

[1] La condition que n soit égal à 1, 2 ou 3 avait été oubliée

SOLUTION,

Par M. L. GIRAUDON.

Rapportons la figure aux deux diagonales AB et BC du carré; désignons par $2a$ la longueur commune à ces diagonales, par R le rayon du cercle, et posons, pour simplifier,

$$R^2 + a^2 = b^2.$$

Pour chaque point $M(x, p)$ du cercle, on a

$$\overline{MA}^2 = y^2 + (x - a)^2 = b^2 - 2ax,$$
$$\overline{MC}^2 = y^2 + (x + a)^2 = b^2 + 2ax,$$
$$\overline{MB}^2 = x^2 + (y - a)^2 = b^2 - 2ay,$$
$$\overline{MD}^2 = x^2 + (y + a)^2 = b^2 + 2ay.$$

En désignant par S_1, S_2, S_3 la somme des premiers membres des quatre égalités précédentes, celle de leurs carrés et celle de leurs cubes, on trouve

$$S_1 = 4b^2,$$
$$S_2 = 4b^4 + 8a^2R^2,$$
$$S_3 = 4b^6 + 24a^2b^2R^2.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par Mlle A.-D. BETTS et M. BOUVAIST.

2131.

(1909, p. 248.)

On projette un point M *variable du cercle circonscrit à un triangle* ABC *sur les côtés* BC, CA, AB, *en* P, Q, R. *Le lieu du milieu de chacun des segments* QR, RP, PQ, *de la droite* PQR *est une ellipse.*

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION,

Par M. THIÉ.

Considérons par exemple le milieu I de QR. Si l'on prend pour axes de coordonnées les droites AB et AC, il est aisé de

---

dans l'énoncé. Elle a été rétablie dans un erratum inséré page 288 du Tome précédent.

voir, même sans calculs, que les coordonnées du point I sont des fonctions linéaires de celles du point M. On passe donc du point M au point I par une *affinité*, homographie particulière qui conserve la droite de l'infini, les rapport de division, les centres des courbes, etc.

Le lieu demandé est la transformée du cercle donné dans cette affinité : c'est une ellipse passant en A, dont le centre correspond à celui du cercle par la transformation considérée; ce centre est par suite le milieu du segment limité par les milieux de AB et AC.

Autres solutions par MM. Bouvaist et Giraudon.

2132.

(1909, p. 288.

D'un point P *quelconque du plan d'une ellipse de centre* O, *on abaisse les quatre normales dont les pieds sont* M_1, M_2, M_3, M_4. Si α_1, α_2, α_3, α_4 *sont les angles que les normales font avec le grand axe, et* β_1, β_2, β_3, β_4 *les angles que les droites* OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 *font avec le même axe, on a*

$$\begin{aligned}&(\operatorname{tang}\alpha_1+\operatorname{tang}\alpha_2+\operatorname{tang}\alpha_3+\operatorname{tang}\alpha_4)\\&\quad\times(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2+\cot\alpha_3+\cot\alpha_4)\\&=(\operatorname{tang}\beta_1+\operatorname{tang}\beta_2+\operatorname{tang}\beta_3+\operatorname{tang}\beta_4)\\&\quad\times(\cot\beta_1+\cot\beta_2+\cot\beta_3+\cot\beta_4)=4.\end{aligned}$$

(E.-N. Barisien.)

Solution,

Par M. R. Bouvaist.

L'équation aux coefficients angulaires des normales à l'ellipse O, issues de $P(\alpha, \beta)$, est

$$\begin{aligned}&b^2\alpha^2m^4-2b^2\alpha\beta m^3\\&\quad-m^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)-2a^2\alpha\beta m-a^2\beta^2=0,\end{aligned}$$

d'où

$$\sum\operatorname{tang}\alpha_1\sum\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha_1}=4.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection de l'ellipse O et de l'hyper-

bole d'Apollonius de P,

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

est

$$a^6\alpha^2 m^4 - 2a^4b^2\alpha\beta m^3$$
$$+ m^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)a^2b^2 - 2a^2b^4\alpha\beta m + b^6\beta^2 = 0;$$

d'où

$$\sum \operatorname{tang}\beta_1 \sum \frac{1}{\operatorname{tang}\beta_1} = 4.$$

C.Q.F.D.

Autre solution par Mlle A.-D. Betts.

2133.

1909, p. 288.

Deux cercles C *et* C′ *sont bitangents à une ellipse* E, *le premier en* A *et* B, *le second en* A′ *et* B′. *Montrer que les tangentes issues de* A *au cercle* C′ *et les tangentes issues de* A′ *au cercle* C *ont même longueur.*

(E.-N. Barisien.)

Solution,

Par M. Thié.

Il faut supposer que les deux cercles considérés dans l'énoncé ont leurs centres sur le même axe de l'ellipse, sans quoi le théorème ne serait pas vrai.

Je ferai la démonstration en remplaçant l'ellipse par une hyperbole. Le théorème, tel qu'il est énoncé, s'ensuivra, en vertu du principe de continuité.

Soit H l'hyperbole tangente aux cercles C et C′, dont nous supposerons les centres sur l'axe non transverse de H. Si l'on fait tourner la figure autour de ce dernier, H engendre un hyperboloïde, C et C′ deux sphères inscrites à ce dernier. Le théorème énoncé est alors évident, si l'on remarque que les deux tangentes considérées ont pour longueur commune celle du segment intercepté sur une génératrice quelconque de H par les deux parallèles de contact de cet hyperboloïde avec les deux sphères.

Autres solutions par Mlle A.-D. Betts, MM. Bouvaist et Klug.

2134.

(1909, p. 236.)

Soient, dans un triangle ABC, I *le centre du cercle inscrit,* O *celui du cercle circonscrit,* I′ *le symétrique de* I *par rapport à* O. *Démontrer les propriétés suivantes :*

1° *Les perpendiculaires à* I′A, I′B, I′C, *élevées en* A, B, C, *rencontrent* BC, CA, AB *en* A′, B′, C′. *Ces trois points sont en ligne droite.*

2° *Si l'on projette* I′ *en* A″, B″, C″ *sur* BC, CA, AB, *les droites* AA″, BB″, CC″ *concourent en un même point.*

Les mêmes propriétés s'appliquent aux centres I_A, I_B, I_C *des cercles exinscrits et à leurs symétriques* I'_A, I'_B, I'_C *par rapport à* O. (E.-N. Barisien.)

Première solution,

Par M. R. Bouvaist.

Si l'on considère les coniques circonscrites à un triangle ABC et telles que les normales à ces coniques en A, B, C soient concourantes, ou les coniques inscrites dans le même triangle ABC et telles que les normales aux points de contact avec les côtés soient concourantes, le lieu du point de concours de ces normales est, dans les deux cas, une même cubique. Le problème, d'ailleurs classique, a été traité analytiquement par Kœhler (*Exercices de Géométrie analytique*, 1re Partie), par M. Papelier (*Coordonnées tangentielles*, 1re Partie) et géométriquement par M. Vacquant dans la *Revue de Mathématiques spéciales*.

Nous n'y reviendrons pas et nous nous bornerons à rappeler que la cubique en question jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est circonscrite au triangle ABC, passe par le centre O du cercle circonscrit (qui d'ailleurs est son centre), par l'orthocentre H, par les centres I, I_A, I_B, I_C des cercles inscrits et exinscrits.

2° Elle se transforme en elle-même par inversion triangulaire par rapport au triangle ABC et enfin elle peut être considérée comme le lieu des points de contact des tangentes issues de O aux hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC.

D'après cela on voit que la cubique envisagée passant par I, I_A, I_B, I_C et ayant pour centre le point O, passe par I', I'_A, I'_B, I'_C, ce qui démontre les propriétés faisant l'objet de la question 2134.

Deuxième solution,

Par M. F. Farjon.

On peut considérer I comme l'orthocentre du triangle LMN formé par les bissectrices extérieures du triangle ABC; I' est le centre du cercle circonscrit à LMN.

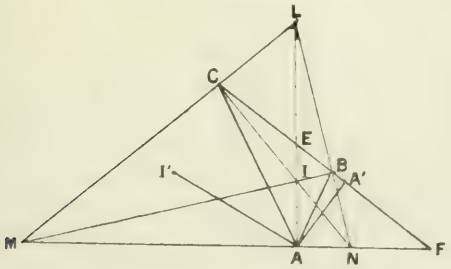
Soient E et F les points d'intersection du côté BC avec les bissectrices AI et AN. On a

$$BE = \frac{ac}{b+c}, \qquad EC = \frac{ab}{b+c}, \qquad FB = \frac{ac}{b-c},$$

$$FE = FB + BE = \frac{2abc}{b^2 - c^2}.$$

On trouve sans difficulté

$$\operatorname{tang} FAA' = \frac{\sin(N - M)}{-\cos(N + M)},$$



et dans le triangle rectangle FAE dont l'angle en F = N — M

$$\frac{A'E}{A'F} = \frac{\cos(N - M)}{-\cos(N + M)},$$

d'où

$$A'E = \frac{abc}{b^2 - c^2} \frac{\cos(N - M)}{\sin M \sin N},$$

$$A'B = A'E - BE = \frac{ac}{b^2 - c^2} \frac{c \sin M \sin N - b \cos M \cos N}{\sin M \sin N},$$

$$A'C = EC + A'E = \frac{ab}{b^2 - c^2} \frac{b \sin M \sin N - c \cos M \cos N}{\sin M \sin N};$$

d'où l'on tire

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}\,\frac{c\sin M\sin N - b\cos M\cos N}{b\sin M\sin N - c\cos M\cos N}$$

$$= \frac{c}{b}\,\frac{c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{b\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - c\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\tang^2\frac{C}{2}}{\tang^2\frac{B}{2}}.$$

En opérant de même pour les points B′ et C′, on reconnaît que les trois points A′, B′, C′ sont sur une même transversale du triangle ABC.

La seconde partie est évidente, puisque les segments que déterminent sur les côtés de ABC les points A″, B″, C″ sont égaux à ceux que déterminent sur ces mêmes côtés les rayons aux points de contact du cercle I et placés en ordre inverse.

Ces propriétés s'étendent aux cas des cercles exinscrits. Le point I'_A, par exemple, est le centre du cercle circonscrit au triangle MIN dont L est l'orthocentre, et la suite des calculs est la même.

2135.

1909, p. 383.

On considère deux ellipses égales E *et* E_1, *l'une de centre* O *et ayant un foyer en* F, *la seconde ayant son centre en* F *et le foyer en* O. *Soient* M *un point quelconque de* E. P *la projection de* F *sur la normale en* M. *La droite* OP *rencontre l'ellipse* E_1 *en deux points* H *et* H′. *Pour l'un de ces points*, H *par exemple* : 1° *les distances de* M *et* H *à* OF *sont égales*; 2° *la longueur* PH *est constante et égale au demi-grand axe.*

Solution,

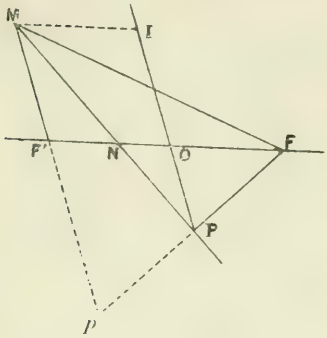
Par M. R. Bouvaist.

L'énoncé proposé revient au suivant :

Soit une ellipse E de foyers F et F′; si l'on projette en P le foyer F sur la normale en un point quelconque M de E, le diamètre passant par P est parallèle à MF′. La parallèle à FF′ menée par M coupe le diamètre passant par P en un point I, tel que IP est égal au demi-grand axe de E.

On a :

1° $$OF = F'O, \qquad PF = pP;$$



donc OP est parallèle à MF';

2° $$IP = MF' + \frac{1}{2} F'p = MF' + \frac{1}{2}(MF - MF').$$

$$PI = \frac{1}{2}(MF + MF').$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par Mlle Rita Murège, MM. Klug, Pélissier et Lez.

2136.

1909, p. 384.

On donne cinq forces, dirigées sur cinq droites fixes, et un point P. *Les forces varient de façon que leur moment résultant par rapport à* P *soit nul : lieu de la résultante générale passant par* P. (M. Têtu.)

Solution,

Par M. Parrod.

Soient $\lambda_i X_i$, $\lambda_i Y_i$, $\lambda_i Z_i$ et $\lambda_i L_i$, $\lambda_i M_i$, $\lambda_i N_i$ les projections et les moments d'un vecteur par rapport à trois axes rectangulaires, l'origine étant P.

Les variables sont les cinq coefficients de proportionnalité

$$\lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On a

$$X = \Sigma\lambda_i X_i, \qquad Y = \Sigma\lambda_i Y_i, \qquad Z = \Sigma\lambda_i Z_i,$$
$$L = \Sigma\lambda_i L_i = 0, \qquad M = \Sigma\lambda_i M_i = 0, \qquad N = \Sigma\lambda_i N_i = 0.$$

Éliminons les paramètres λ_i. On obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} X & X_1 & X_2 & \dots & X_5 \\ Y & Y_1 & \dots & \dots & Y_5 \\ Z & Z_1 & \dots & \dots & Z_5 \\ 0 & L_1 & \dots & \dots & L_5 \\ 0 & M_1 & \dots & \dots & M_5 \\ 0 & N_1 & \dots & \dots & N_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu demandé est un plan.

Autre solution par Mlle Rita Murège.

QUESTION.

2162. — Soient ABCD un tétraèdre régulier, E le milieu de BC, F le milieu de DA; on mène dans le plan EDA deux droites EH, EK, faisant avec EF des angles de 30°.

Si l'on projette en P, Q, R, S un point M de l'une de ces droites sur les plans des faces du tétraèdre, la sphère PQRS est tangente à la sphère inscrite (1).

Si M est sur EH, le point inverse M′ (qui a même sphère pédale) est sur EK. L'enveloppe de la droite MN′ est une ellipse tangente aux droites EH, EK aux points H et K, et dont le cercle principal est tangent aux droites ED, EA en D et A; le point F est un foyer.

Le lieu du centre de la sphère pédale est une hyperbole ayant même axe focal que l'ellipse précédente, et dont les asymptotes sont parallèles aux droites EH, EK; le milieu O de EF est un foyer. G. Fontené.

---

(1) Ce théorème se rattache à des recherches que j'ai poursuivies par le calcul; une démonstration élémentaire semble devoir être assez difficile.

[R1a]

SUR LES ACCÉLÉRATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. CH. HALPHEN.

On doit à M. Darboux un théorème aussi élégant que simple, qu'on peut formuler ainsi :

Un point étant en mouvement dans un champ de forces, si sa vitesse dérive d'un potentiel, il en est de même de l'accélération (c'est-à-dire qu'il existe une fonction de forces).

Soient en effet, par rapport à trois axes rectangulaires fixes, x, y, z, les coordonnées du point; $V(x, y, z)$ étant une fonction de point, on a par hypothèse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right),$$

et pareillement

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right),$$

où ΔV désigne le paramètre différentiel du premier ordre

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

L'accélération dérive donc du potentiel $\frac{1}{2}\Delta V$.

Considérons maintenant l'accélération du second

ordre, dont les composantes sont $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$. On a comme ci-dessus

$$(1)\quad \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta V + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Delta V\right),$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \ldots \qquad \frac{d^3z}{dt^3} = \ldots$$

Il paraît assez naturel de se demander si elle ne dérive pas du potentiel $\frac{1}{4}\Delta\Delta V$, c'est-à-dire si elle ne suit pas vis-à-vis de l'accélération la même loi que celle-ci vis-à-vis de la vitesse. Or, on a

$$\Delta\Delta V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta V\right)^2,$$

de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\Delta\Delta V\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta V\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta V + \frac{\partial}{\partial y}\Delta V\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V + \frac{\partial}{\partial z}\Delta V\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Delta V\right).$$

Comparons à l'expression (1) : les dérivées premières y sont de celles de V, au lieu d'être, comme ici, celles de ΔV. Il y a donc identité, si

$$(2)\qquad V = \Delta V.$$

Donc, sous la condition (2), l'accélération du second ordre dérive aussi d'un potentiel, $\frac{1}{4}\Delta\Delta V$; mais en raison même de cette condition, ce potentiel n'est autre que $\frac{V}{4}$, le potentiel dont dérive l'accélération étant alors $\frac{V}{2}$. Il n'y a aucune difficulté à voir que l'accélération du troisième ordre dérive du potentiel $\frac{V}{8}$; l'accélération d'ordre n, du potentiel $\frac{V}{2^n}$.

Voilà donc, sous la seule condition (2), un mouvement dont toutes les accélérations successives dérivent de potentiels, décroissant en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Quel est ce mouvement?

La condition (2) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre que nous allons réduire immédiatement à une forme beaucoup plus simple. Puisque $V = \Delta V$, les composantes de l'accélération

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial z}$$

sont proportionnelles à celles de la vitesse. L'accélération est alors purement tangentielle, donc le mouvement est *rectiligne*.

Une élégante démonstration du même résultat m'a été indiquée par M. H. Vergne. Si une fonction $V(x, y, z)$ satisfait à l'équation (2), la famille de surfaces $V(x, y, z) = \text{const.}$ est composée de surfaces parallèles. En effet, tout le long d'une surface (S) $V = \text{const.}$, la dérivée normale $\frac{dV}{dn}$, qui est égale à $\sqrt{\Delta V}$, est constante; et par suite, à la distance dn prise sur les normales à la surface (S), à partir de cette surface, on retrouve pour V une valeur constante. Or, d'après les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

la trajectoire du point mobile est trajectoire orthogonale de la famille de surfaces $V = \text{const.}$; c'est donc une ligne droite, puisque ces surfaces sont parallèles.

Prenons alors la trajectoire pour axe des x; y et z n'interviennent plus, et (2) se réduit à

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = V \qquad \text{ou} \qquad \frac{dV}{\sqrt{V}} = dx,$$

d'où, par intégration,

$$V = \frac{1}{4}(x - c)^2.$$

Ceci étant, la vitesse a pour expression

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x - c),$$

d'où, en intégrant,

$$x = ke^{\frac{t}{2}} - c.$$

Telle est la loi du mouvement rectiligne en question.

Le mouvement que nous avons trouvé n'est pas le seul où, la vitesse dérivant d'un potentiel, il en est de même des accélérations d'ordre supérieur : il est aisé de voir, par exemple, que dans tout mouvement rectiligne, cette condition est remplie. Mais c'est le seul mouvement où le potentiel de chaque accélération se déduit du précédent d'après la même loi que suit le potentiel de l'accélération vis-à-vis du potentiel de la vitesse.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1910.

Composition de Mathématiques (Sciences I).

PREMIÈRE COMPOSITION.

I. *Soit* (G) *la courbe définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = \frac{1 - t^2}{t}, \qquad y = 1 - t^2.$$

où t est un paramètre arbitraire.

1° *Déterminer un polynome du second degré $f(x, y)$ (dans lequel le coefficient de y^2 est 1) tel qu'on ait une identité de la forme*

$$t^2 f\left(\frac{1-t^2}{t}, 1+t^2\right) = (t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2.$$

On montrera qu'une telle identité n'est possible que moyennant l'existence d'une relation entre les constantes α, β, γ. Cette relation se décompose en deux autres très simples.

2° *Supposant successivement vérifiée chacune de ces deux relations, les coefficients de $f(x, y)$ se trouvent, dans chaque cas, exprimés au moyen de deux des paramètres α, β, γ. Pour l'une des solutions, le polynome $f(x, y)$ est le carré d'un polynome du premier degré en x, y.*

Des résultats précédents on déduit immédiatement la réponse aux questions suivantes :

3° *Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de (G) pour que ces trois points soient en ligne droite.*

4° *Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de (G) pour qu'il existe une conique (C) tangente à (G) en ces trois points.*

5° *Former l'équation générale des coniques (C).*

En outre :

6° *Trouver, lorsque la conique (C) se décompose en deux droites, le lieu du point de concours des deux droites.*

7° *Montrer que les tangentes aux trois points de contact de (C) et de (G) coupent encore la courbe (G) en trois autres points situés sur une même droite (D).*

8° *Trouver l'équation générale de la droite (D)*

en fonction des mêmes paramètres que ceux qui déterminent la conique correspondante (C).

9° *Déterminer en fonction des mêmes paramètres le centre de gravité* P *du triangle formé par les points de contact de* (C) *et de* (G).

10° *Trouver l'enveloppe de la droite* (D) *lorsque* P *décrit une parallèle à l'axe des* x.

II. *Une surface* (Σ), *rapportée à des axes rectangulaires, est coupée par chaque plan parallèle au plan* xOy *suivant une courbe fermée. L'aire* S *de cette courbe est une fonction déterminée* $[S = f(z)]$ *de la cote* z *de tous ses points. On suppose la surface* (Σ) *continue et l'on suppose que la fonction* $f(z)$ *admet des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre inclusivement.*

Déterminer quelle doit être la forme la plus générale de la fonction $f(z)$ *pour que le volume compris entre la surface* (Σ) *et les plans de cotes* z_0 *et* z *soit donné, quels que soient* z_0 *et* z, *par la formule*

$$V = \frac{z - z_0}{6}\left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z - z_0}{2}\right)\right].$$

SOLUTION

Par Jean Servais.

I.

1. Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + y^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

On a alors

$$\begin{aligned} t^2 f\left(\frac{1+t^2}{t}, 1 - t^2\right) \\ = t^6 + 2Bt^5 + (A + 2 + 2E)t^4 + (4B + 2D)t^3 \\ + (2A + 1 + 2E + F)t^2 + (2B + 2D)t + A. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(t^3+\alpha t^2+\beta t+\gamma)^2 = t^6+2\alpha t^5+(\alpha^2+2\beta)t^4+(2\gamma+2\alpha\beta)t^3 \\ +(2\alpha\gamma+\beta^2)t+2\beta\gamma t+\gamma^2.$$

En identifiant ces deux expressions, on a, pour déterminer les coefficients du polynome $f(x,y)$, les relations

$$B=\alpha,$$
$$A+2+2E=\alpha^2+2\beta,$$
$$2B+D=\gamma+\alpha\beta,$$
$$2A+1+2E+F=2\alpha\gamma+\beta^2,$$
$$B+D=\beta\gamma,$$
$$A=\gamma^2.$$

La première, la troisième et la cinquième ne contenant que B et D, on peut éliminer B et D entre elles, et l'on obtient la relation

$$\alpha+\beta\gamma=\gamma+\alpha\beta,$$

qui s'écrit

$$(\alpha-\gamma)(1-\beta)=0,$$

et se décompose en

$$\alpha=\gamma \qquad \text{ou} \qquad \beta=1.$$

2. Les cinq relations autres que la troisième donnent

$$A=\gamma^2, \qquad B=\alpha, \qquad D=\beta\gamma-\alpha,$$
$$2E=\alpha^2-\gamma^2+2(\beta-1), \qquad F=(\beta-1)^2-(\alpha-\gamma)^2.$$

Si l'on prend d'abord $\alpha=\gamma$, elles deviennent

$$A=\alpha^2, \qquad B=\alpha, \qquad D=\alpha(\beta-1),$$
$$E=\beta-1, \qquad F=(\beta-1)^2.$$

Dans ce cas $f(x,y)$ est un carré parfait :

$$f(x,y)=(\alpha x+y+\beta-1)^2.$$

La conique (C) se réduit à une droite double.

Si l'on prend ensuite $\beta = 1$, on a

$$A = \gamma^2, \qquad B = \alpha, \qquad D = \gamma - \alpha,$$
$$2E = \alpha^2 - \gamma^2, \qquad F = -(\alpha - \gamma)^2,$$

et le polynome $f(x, y)$ prend la forme

$$\gamma^2 x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 2(\alpha - \gamma)x + (\alpha^2 - \gamma^2)y - (\alpha - \gamma)^2.$$

3. Pour que trois points de (G) soient en ligne droite, sur la droite

$$\alpha x - y + \beta - 1 = 0,$$

il faut et il suffit que les paramètres t_1, t_2, t_3 correspondants soient racines de l'équation ($\gamma = \alpha$)

$$t^3 - \alpha t^2 + \beta t + \alpha = 0,$$

et il est manifeste que les racines de cette équation vérifient la relation

$$(1) \qquad t_1 + t_2 + t_3 = t_1 t_2 t_3.$$

4. Pour qu'une conique (C) dont l'équation est

$$f(x, y) = 0$$

soit triplement tangente à (G), il faut et il suffit que l'équation aux t des points d'intersection

$$t^2 f\left(\frac{1 - t^2}{t}, 1 - t^2\right) = 0$$

soit carré parfait, sans que $f(x, y)$ le soit. Or, d'après ce qui précède, ceci aura lieu lorsque la conique a pour équation

$$(2) \qquad \gamma^2 x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 2(\alpha - \gamma)x$$
$$+ (\alpha^2 - \gamma^2)y - (\alpha - \gamma)^2 = 0,$$

et alors ($\beta = 1$) l'équation aux t des points de contact

est

$$t^3 + \alpha t^2 - t + \gamma = 0.$$

Ses trois racines satisfont manifestement à la relation

$$(3) \qquad t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2 = 1.$$

5. L'équation (2) fournit l'équation générale des coniques (C). Elle dépend de deux paramètres α et γ.

6. Il est évident que lorsque la conique (2) se décompose en deux droites, le point d'intersection de ces deux droites est situé sur (G); car chacune des deux droites ne pouvant être tangente à (G) qu'en un point, le troisième point double d'intersection est nécessairement le sommet de l'angle formé par les deux droites. Le lieu de ce point est donc la courbe (G).

C'est ce qu'on vérifie par le calcul. Pour que la conique (2) se réduise à un système de deux droites il faut et il suffit que les équations

$$\frac{1}{2} f'_x = \gamma^2 x + \alpha y - (\alpha - \gamma) = 0,$$

$$f'_y = 2\alpha x + 2y - \alpha^2 - \gamma^2 = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha - \gamma} f'_z = -2x + (\alpha - \gamma) y - 2(\alpha - \gamma) = 0$$

aient une solution commune.

Des deux premières on tire

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{2 - \alpha(\alpha - \gamma)}{2(\alpha + \gamma)}, \\[2ex] y = \dfrac{2\alpha + \gamma^2(\alpha + \gamma)}{2(\alpha + \gamma)}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans la troisième, elle devient

$$[\gamma(\alpha + \gamma) - 2]^2 = 0.$$

On en tire

$$\alpha - \gamma = -\frac{2}{\gamma}, \qquad \alpha = -\frac{\gamma^2 + 2}{\gamma}.$$

En portant ces valeurs de α et $\alpha + \gamma$ dans les équations (4), elles deviennent

$$x = \frac{1 + \gamma^2}{\gamma},$$

$$y = 1 + \gamma^2.$$

Elles prouvent que le point de concours des deux droites est le point de (G) qui correspond à la valeur $t = \gamma$ du paramètre.

7. Soient t'_1, t'_2, t'_3 les paramètres des points d'intersection des tangentes à (G) aux points t_1, t_2, t_3.

En appliquant la relation (1) au cas limite où parmi les trois points en ligne droite il y en a deux confondus, on a

$$2t_1 + t'_1 = t_1^2 t'_1,$$

d'où

$$t'_1 = \frac{2t_1}{t_1^2 - 1}.$$

On aurait de même

$$t'_2 = \frac{2t_2}{t_2^2 - 1},$$

$$t'_3 = \frac{2t_3}{t_3^2 - 1}.$$

Il suffit de prouver qu'on a

$$t'_1 + t'_2 + t'_3 = t'_1 t'_2 t'_3$$

ou

$$\frac{2t_1}{t_1^2 - 1} + \frac{2t_2}{t_2^2 - 1} + \frac{2t_3}{t_3^2 - 1} = \frac{8t_1 t_2 t_3}{(t_1^2 - 1)(t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1)}$$

ou encore

$$(5) \qquad \Sigma t_1 (t_2^2 - 1)(t_3^2 - 1) - 8t_1 t_2 t_3 = 0,$$

lorsque les trois points t_1, t_2, t_3 sont alignés. Or on a l'identité

$$\Sigma t_1(t_2^2-1)(t_3^2-1)-8t_1t_2t_3=2[\Sigma t_2t_3-1][t_1t_2t_3-\Sigma t_1].$$

Elle prouve que l'égalité (5) est vérifiée, d'une part, lorsque

$$t_1t_2t_3=\Sigma t_1,$$

c'est-à-dire lorsque les trois points de contact t_1, t_2, t_3 sont en ligne droite, la conique (C) étant une droite double ($\alpha=\gamma$); et, d'autre part, lorsque

$$\Sigma t_2t_3=1,$$

c'est-à-dire lorsque la conique (C) est triplement tangente à la cubique (G).

8. Les paramètres t_1, t_2, t_3 sont racines de l'équation

$$t^3-\alpha t^2-t+\gamma=0. \tag{6}$$

L'équation qui donne les valeurs de t' est la transformée en

$$t'=\frac{2t}{t^2-1}. \tag{7}$$

Pour la former, il suffit d'éliminer t entre les équations (6) et (7), ce qui donne, tous calculs faits,

$$[(\alpha+\gamma)^2-4]t'^3-8\gamma t'^2-4(\alpha\gamma-1)t'-8\gamma=0.$$

Cette équation est bien de la forme

$$t'^3-\alpha' t'^2-\beta' t'-\alpha'=0,$$

où

$$\alpha'=\frac{8\gamma}{(\alpha-\gamma)^2-4},\qquad \beta'=\frac{4(\alpha\gamma-1)}{(\alpha-\gamma)^2-4}.$$

En vertu des résultats du n° 3 ci-dessus, cela prouve que les trois points sont en ligne droite sur la droite D qui a pour équation

$$\alpha' x + y + \beta' - 1 = 0$$

ou

$$8\gamma x + [(\alpha + \gamma)^2 - 4]y - (\alpha - \gamma)^2 = 0.$$

9. Les coordonnées du centre de gravité P du triangle formé par les trois points t_1, t_2, t_3 sont

$$\xi = \frac{1}{3}\sum \frac{1 - t_1^2}{t_1} = \frac{1}{3t_1t_2t_3}[\Sigma t_2t_3 - t_1t_2t_3\Sigma t_1],$$

$$\eta = \frac{1}{3}\Sigma(1 - t_1^2) = \frac{1}{3}[3 + (\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_2t_3].$$

Comme t_1, t_2, t_3 sont racines de l'équation (6), on a

$$\Sigma t_1 = -\alpha, \qquad \Sigma t_2t_3 = 1, \qquad t_1t_2t_3 = -\gamma,$$

et, par suite,

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{1 + \alpha\gamma}{3\gamma}, \\ \eta = \dfrac{1 - \alpha^2}{3}. \end{cases}$$

10. Lorsque P décrit une parallèle à l'axe des x, η, et par suite α, reste constant.

L'équation de la droite (D) s'écrit

$$(y - 1)\gamma^2 + 2[4x - \alpha y + \alpha]\gamma + (\alpha^2 - 4)y - \alpha^2 = 0.$$

Son enveloppe, lorsque α reste constant et que γ varie, est la conique qui a pour équation

$$(y - 1)[\alpha^2(y - 1) - 4y] - [4x + \alpha(y + 1)]^2 = 0.$$

L'ensemble des termes du second degré est

$$(\alpha^2 - 4)y^2 - (4x + \alpha y)^2.$$

qui se présente ainsi décomposé en deux carrés indépendants.

Si $\alpha^2 > 4$, $\left(\eta > \frac{5}{3}\right)$, les deux carrés sont de signes contraires, la courbe enveloppe est une hyperbole.

Si $\alpha^2 = 4$, $\left(\eta = \frac{5}{3}\right)$, l'ensemble des termes du second degré est carré parfait, l'enveloppe est une parabole.

Enfin si $\alpha^2 < 4$, $\left(\eta < \frac{5}{3}\right)$, les deux carrés sont de même signe et l'enveloppe est une ellipse.

II.

D'après l'énoncé on doit avoir

$$(8) \qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \frac{z - z_0}{6}\left[f(z) + f(z_0) - 4f(z_1)\right].$$

en posant

$$z_1 = \frac{z_0 + z}{2}.$$

Cette égalité devant être vérifiée quels que soient z et z_0, ses dérivées par rapport à z ou à z_0 le sont aussi.

En dérivant par rapport à z, on a

$$f(z) = \frac{1}{6}\left[f(z) + f(z_0) - 4f(z_1)\right]$$
$$+ \frac{z - z_0}{6}\left[f'(z) + 2f'(z_1)\right].$$

Dérivons cette dernière par rapport à z_0, il vient

$$f'(z) - f'(z_0) = (z - z_0)f''(z_1).$$

En dérivant une dernière fois par rapport à z, on

obtient enfin

$$f'(z) = f''(z_1) + \frac{z - z_0}{2} f'''(z_1),$$

qui s'écrit

$$f'(z) - f''(z_1) = (z - z_1) f'''(z_1).$$

Si, dans cette égalité, on laisse z_1 fixe, ce qui est permis, car z_1 est aussi arbitraire que z_0, elle prouve que $f'''(z)$ est *linéaire* en z et, par suite, que $f(z)$ *est un polynome du troisième degré en* z.

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante; car si l'on pose

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d,$$

il est facile de vérifier que l'égalité (8) est toujours satisfaite.

On peut remarquer que la démonstration précédente n'a besoin d'admettre l'existence des dérivées de $f'(z)$ que jusqu'au troisième ordre.

Composition de Mathématiques

(Sciences I).

SECONDE COMPOSITION.

I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *et une fonction* $f(z)$ *qui admet une dérivée* $f'(z)$, *les équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \rho x_0, \\ y = \rho y_0, \\ \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} = t, \end{cases} \qquad \left(\rho = \sqrt{\frac{f(z_0)}{f(z)}}\right)$$

où t désigne le temps, définissent le mouvement d'un point $M(x, y, z)$, *si l'on connaît la position* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *de ce point à l'instant* $t = 0$; *quand on a fixé la valeur de t, les mêmes équations* (1) *définissent une transformation remplaçant le point* M_0 *par le point* M.

1° *Montrer que les projections de la vitesse du point* $M(x, y, z)$ *sur les axes* Ox, Oy, Oz *peuvent s'exprimer par des fonctions de x, y, z qui ne contiennent ni le temps t, ni les coordonnées initiales* x_0, y_0, z_0.

2° *A tous les points d'un cercle* (C_0) *ayant pour équations*

$$\begin{aligned} &(x_0 - a_0)^2 + y_0^2 = R_0^2 \\ &z_0 = \text{const.} \end{aligned} \qquad (a_0, R_0 \text{ constants})$$

correspondent, à l'instant t, d'après les équations (1), *des points* M *tous situés sur un cercle* (C) *dont le plan est parallèle au plan* xOy. *Calculer, en fonction du z de ce plan, le rayon* R *et l'abscisse a du centre du cercle* (C).

3° *Soient* S *la surface engendrée par le cercle* (C) *quand t varie à partir de zéro,* (T) *le solide limité par la surface* (S) *et par les plans* $z = z_1$, $z = z_2$.

Vérifier que le volume V *de* (T) *ne dépend que de la différence des valeurs de t qui correspondent à* z_2 *et à* z_1.

Effectuer jusqu'au bout les calculs et construire la trajectoire d'un point M *dans les deux cas suivants :*

Premier cas

$$f(z) = \frac{k^2}{2z} \qquad (k \text{ constant});$$

Deuxième cas

$$f(z) = k\frac{z^2 + k^2}{z^2} \qquad (k \text{ constant}).$$

Calculer, dans chacun des deux cas précédents, les coordonnées $(\xi, 0, \zeta)$ *du centre de gravité du solide* (T) *supposé homogène, en se servant des formules*

$$V\xi = \int_{z_1}^{z_2} a(z)A(z)\,dz \qquad \text{et} \qquad V\zeta = \int_{z_1}^{z_2} z\,A(z)\,dz$$

où $A(z)$ *désigne l'aire et* $a(z)$ *l'abscisse du centre du cercle* (C) *de cote* z.

II. *Construire la courbe dont l'équation est*

$$y = \operatorname{tang} x - x.$$

Trouver, avec deux décimales, la racine comprise entre 1 *et* 1,1 *de l'équation*

$$\operatorname{tang} x - x = \frac{\pi}{4}.$$

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

I.

1. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt}x_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dt}y_0,$$

$$\frac{dz}{dt} = f(z).$$

D'ailleurs, comme

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho}{2}\frac{f'(z)}{f(z)},$$

on en conclut, pour les composantes de la vitesse,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\rho x_0}{2} f'(z) = -\frac{x}{2} f'(z),$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\rho y_0}{2} f'(z) = -\frac{y}{2} f'(z),$$
$$\frac{dz}{dt} = f(z).$$

La trajectoire du point mobile est *plane* et située dans le plan

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

2. Les équations du cercle (C) s'obtiennent en remplaçant, dans celles de (C_0), x_0 par $\frac{x}{\rho}$ et y_0 par $\frac{y}{\rho}$. Ces équations sont donc

$$(x - a)^2 + y^2 = R_0^2 \rho^2,$$
$$z = \text{const}.$$

Le rayon R et l'abscisse a du centre de ce cercle sont donc

$$R = R_0 \rho, \qquad a = a_0 \rho.$$

3. L'aire du cercle (C) étant égale à $\pi R_0^2 \rho^2$, le volume V engendré par le cercle lorsque t varie de t_1 à t_2 est

$$V = \int_{z_1}^{z_2} \pi R_0^2 \rho^2 \, dz = \pi R_0^2 f(z_0) \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{f(z)},$$

$$(1) \qquad V = \pi R_0^2 f(z_0)(t_2 - t_1).$$

Les coordonnées du centre de gravité de ce volume

sont données par les formules

$$(2)\quad \begin{cases} V\xi = \pi a_0 R_0^2 \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \rho^3\, dz, \\ V\zeta = \pi R_0^2 \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \rho^2 z\, dz. \end{cases}$$

1° *Supposons* $f(z) = \frac{k^2}{2z}$.

On a alors

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{2z\, dz}{k^2} = \frac{z^2 - z_0^2}{k^2},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{z}{z_0}}.$$

La trajectoire est alors la demi-parabole intersection du plan

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$$

avec le demi-cylindre parabolique

$$x = \sqrt{\frac{z}{z_0}}\, x_0.$$

En appliquant les formules (1) et (2), on a

$$V = \frac{\pi R_0^2}{2 z_0}(z_2^2 - z_1^2),$$

$$V\xi = \frac{2}{5}\,\frac{\pi a_0 R_0^2}{z_0^{\frac{3}{2}}}\left(z_2^{\frac{5}{2}} - z_1^{\frac{5}{2}}\right),$$

$$V\zeta = \frac{1}{3}\,\frac{\pi R_0^2}{z_0}(z_2^3 - z_1^3).$$

D'où l'on tire

$$\xi = \frac{4}{5}\,\frac{a_0}{z_0^{\frac{1}{2}}}\,\frac{z_2^{\frac{5}{2}} - z_1^{\frac{5}{2}}}{z_2^2 - z_1^2},$$

$$\zeta = \frac{2}{3}\,\frac{z_2^3 - z_1^3}{z_2^2 - z_1^2}.$$

2° *Supposons*

$$f(z) = k\frac{z^2 - k^2}{z^2}.$$

On a alors

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{z^2\,dz}{k(z^2 - k^2)} = \int_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{z^2 - k^2}\right) dz,$$

$$t = \frac{z - z_0}{k} - \left(\text{arc tang}\,\frac{z}{k}\right)_{z_0}^{z},$$

$$\rho = \frac{z}{z_0}\sqrt{\frac{z_0^2 - k^2}{z^2 + k^2}}.$$

La trajectoire est la portion de quartique, située dans le plan

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0},$$

dont la projection sur le plan des zx a pour équation

$$\frac{x}{x_0} = \frac{z}{z_0}\sqrt{\frac{z_0^2 - k^2}{z^2 + k^2}},$$

ou, en la rendant entière,

$$z^2 x^2 z_0^2 - z^2 z_0^2 x_0^2 - k^2(x^2 z_0^2 - x_0^2 z^2) = 0.$$

C'est une quartique unicursale qui présente un point double à l'origine et deux autres points doubles à l'infini sur les axes Ox et Oz.

En écrivant l'équation sous la forme

$$z^2 z_0^2 (x - x_0)(x + x_0) - k^2 (xz_0 - x_0 z)(xz_0 + x_0 z) = 0,$$

on met en évidence les quatre droites

$$x = x_0, \qquad x = -x_0,$$
$$xz_0 - x_0 z = 0, \qquad xz_0 + x_0 z = 0$$

qui séparent des régions.

En la mettant sous la forme

$$z^2 x^2 z_0^2 - k^2 z_0^2 x^2 - (k^2 - z_0^2) x_0^2 z^2 = 0,$$

on met en évidence les deux tangentes à l'origine

$$k z_0 x \pm \sqrt{k^2 + z_0^2}\, x_0 z = 0,$$

et l'on voit, en outre, que la courbe est tout entière située dans l'angle de ces deux droites qui comprend l'axe Oz.

Enfin en mettant l'équation sous la forme

$$z^2 [x^2 z_0^2 - (k^2 - z_0^2) x_0^2] + k^2 z_0^2 x^2 = 0,$$

on met en évidence les deux asymptotes réelles parallèles à Oz

$$x z_0 \pm x_0 \sqrt{k^2 + z_0^2} = 0,$$

et l'on voit également que la courbe est tout entière comprise entre ces deux parallèles.

Enfin la courbe est symétrique par rapport aux deux axes.

La forme est alors parfaitement déterminée, comme l'indique la figure ci-contre.

En appliquant les formules (1) et (2), on a

$$V = \pi k R_0^2 \frac{z_0^2 - k^2}{z_0^2} \left[\frac{z_2 - z_1}{k} - \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{z}{k} \right)_{z_1}^{z_2} \right],$$

$$V\xi = \pi a_0 R_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^3 (z_0^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{z_0^3 (z^2 - k^2)^2}\, dz,$$

$$V\zeta = \pi R_0^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 (z_0^2 + k^2)}{z_0^2 (z^2 - k^2)}\, z\, dz.$$

Les deux intégrales précédentes se calculent aisé-

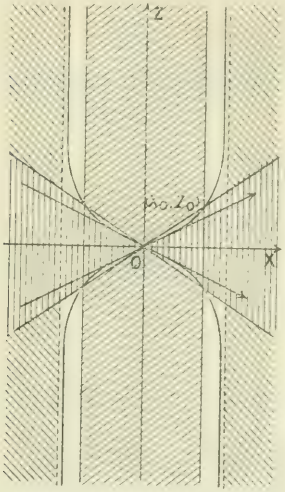
ment dès qu'on remarque qu'elles ne dépendent que de z^2.

Posons

$$u = \sqrt{z^2 - k^2}, \qquad u_1 = \sqrt{z_1^2 - k^2}, \qquad u_2 = \sqrt{z_2^2 - k^2}.$$

Il vient

$$u\,du = z\,dz,$$



et l'on a

$$V\zeta = \frac{\pi a_0 R_0^2 (z_0^2 + k^2)^{\frac{5}{2}}}{z_0^3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - k^2}{u^2}\,du$$

$$= \frac{\pi a_0 R_0^2 (z_0^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{z_0^3} \left[u_2 - u_1 - k \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \right],$$

$$V\zeta = \frac{\pi R_0^2 (z_0^2 + k^2)}{z_0^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 - k^2}{u}\,du$$

$$= \frac{\pi R_0^2 (z_0^2 + k^2)}{z_0^2} \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - k^2 \log \frac{u_2}{u_1} \right).$$

II.

La courbe qui a pour équation

$$y = \operatorname{tang} x - x$$

est bien connue; on l'obtient en ajoutant les ordonnées de la courbe

$$y = \operatorname{tang} x$$

et de la droite

$$y = -x.$$

L'équation

$$f(x) = \operatorname{tang} x - x - \frac{\pi}{4} = 0$$

a une racine et une seule comprise dans l'intervalle de continuité $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. En effet, la dérivée de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang}^2 x$$

étant toujours positive, la fonction $f(x)$ croît de $-\infty$, pour $x = -\frac{\pi}{2}$, jusqu'à $+\infty$, pour $x = +\frac{\pi}{2}$. Elle s'annule donc une seule fois dans l'intervalle.

L'arc de longueur 1 vaut $57^\circ 17'$ et sa tangente est 1,5412.

L'arc de longueur 1,1 vaut $63^\circ 2'$ et sa tangente est 1,9634.

Comme d'ailleurs $\frac{\pi}{4} = 0,7854$, on a

$$f(1) = 1,5412 - 1,7854 = -0,2442 < 0,$$
$$f(1,1) = 1,9634 - 1,8854 = +0,0780 > 0.$$

La racine est donc bien comprise dans l'intervalle 1 et 1,1 : et pour calculer une seconde décimale il suffit

d'appliquer la correction de Newton à la valeur approchée 1,1. On a

$$h = -\frac{f(1,1)}{f'(1,1)} = -\frac{0,0780}{(1,9634)^2} = -0,020.$$

La racine cherchée est donc, avec deux décimales exactes, par excès,

$$x = 1,1 - 0,02 = 1,08.$$

Composition de Mathématiques
(Sciences II).

I. *On donne deux axes coordonnés rectangulaires* Ox, Oy *et une droite* (D) *parallèle à l'axe* Oy.

A chaque point M *d'une courbe* (C), *située dans le plan des deux axes, on fait correspondre un point* M', *de même abscisse que le point* M, *par la condition que la parallèle menée par l'origine à la tangente en* M *à la courbe* (C) *et la parallèle à l'axe* Ox *menée par le point* M' *se rencontrent sur la droite* (D). *Soit* (C') *le lieu décrit par le point* M' *quand le point* M *décrit la courbe* (C). *Soit* M'' *le point qui se déduit du point* M' *comme le point* M, *en remplaçant toutefois la courbe* (C) *par la courbe* (C').

Déterminer la courbe (C) :

1° *De manière qu'elle passe par l'origine et que la longueur* MM' *soit égale à une ligne donnée;*

2° *De manière qu'elle passe par l'origine, qu'elle y soit tangente à la bissectrice de l'angle* xOy *et que la longueur* MM'' *soit égale à une ligne donnée.*

II. *On considère le mouvement défini par les équations*

$$x = 3a\cos t - a^3\cos 3t, \qquad y = 3a\sin t - a^3\sin 3t,$$
$$z = 3a^2\cos 2t.$$

où t désigne le temps et a un paramètre constant. Déterminer la vitesse et l'accélération.

La trajectoire est une courbe fermée; quelle est sa longueur? Déterminer a de façon que cette longueur soit égale à 3π. (*On se bornera à calculer deux décimales.*)

III. *Évaluer les deux intégrales définies*

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx, \qquad B = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,dx.$$

SOLUTION

Par Jean Servais.

I.

Soit

$$x = a$$

l'équation de la droite (D). L'équation de la parallèle menée par l'origine à la tangente en $M(x, y)$ à la courbe (C) a pour équation

$$Y = \frac{dy}{dx}X.$$

Elle coupe la droite (D) au point de coordonnées

$$X = a, \qquad Y = \frac{dy}{dx}a.$$

Les coordonnées du point M′ sont alors

$$x' = x, \qquad y' = Y = a\frac{dy}{dx}.$$

1° La longueur du segment $\overline{MM'}$ est

$$\overline{MM'} = y' - y = a\frac{dy}{dx} - y.$$

En écrivant que ce segment est égal à b, on obtient, pour déterminer la courbe (C), l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \qquad a\frac{dy}{dx} - y = b,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = Ce^{\frac{x}{a}} - b$$

Pour trouver la solution qui passe à l'origine, écrivons que pour $x = 0$ on a $y = 0$, ce qui donne

$$0 = C - b, \qquad C = b;$$

et la courbe cherchée a pour équation

$$y = b\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right).$$

2° Le point M″ se déduisant de M′, comme M′ se déduit de M, les coordonnées de M″ sont

$$x'' = x', \qquad y'' = a\frac{dy'}{dx'},$$

ou, en remplaçant x' et y' par leurs valeurs en fonction de x et y,

$$x'' = x, \qquad y'' = a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

La longueur du segment $\overline{MM''}$ est alors

$$\overline{MM''} = y'' - y = a^2\frac{d^2y}{dx^2} - y.$$

En écrivant que ce segment est égal à b, on a, pour déterminer la courbe (C), l'équation différentielle du

second ordre

$$(2) \qquad a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - y = b,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = \mathrm{A} e^{\frac{x}{a}} + \mathrm{B} e^{-\frac{x}{a}} - b.$$

En écrivant que pour $x = 0$ on a : $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$, il vient

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = b,$$
$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = a.$$

On en tire

$$\mathrm{A} = \frac{a - b}{2}, \qquad \mathrm{B} = \frac{b - a}{2},$$

et l'équation de la courbe (C) est, dans ce cas,

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) - \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2\right).$$

II.

Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = -3a(\sin t - a^2 \sin 3t),$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a(\cos t + 3a^2 \cos 3t),$$

$$\frac{dz}{dt} = -6a^2 \sin 2t;$$

celles de l'accélération sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -3a(\cos t - 3a^2 \cos 3t),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -3a(\sin t - 3a^2 \sin 3t),$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -12a^2 \cos 2t.$$

La formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne, tous calculs faits,

$$ds^2 = 9a^2(1 + a^2)^2\, dt^2,$$
$$ds = 3a\,(1 + a^2)\, dt.$$

Pour avoir la courbe entière, il suffit de faire varier t de 0 à 2π, on a donc

$$s = 3a(1 + a^2)\int_0^{2\pi} dt = 6a\pi(1 + a^2).$$

En égalant s à 3π, on a, pour déterminer a, l'équation

$$f(a) = 2a^3 + 2a - 1 = 0,$$

qui a une seule racine réelle et positive. Cette racine est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, car

$$f(0) = -1, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

sont de signes contraires. En appliquant la correction de Newton à la racine $\frac{1}{2}$, on a

$$h = -\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{6}{4} + 2} = -\frac{1}{14}.$$

La nouvelle valeur approchée est donc

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{3}{7} = 0,428.$$

C'est la valeur approchée cherchée, par excès, car

$$f(0,428) > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0,42) < 0,$$

comme il est facile de le vérifier.

III.

On a

$$A + B = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} dx = \frac{2\pi}{3},$$

$$B - A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{tang}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx,$$

$$B - A = \left| -\log\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \log \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)};$$

or

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

donc

$$B - A = \log\frac{2}{\sqrt{3} - 1},$$

$$A = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\log\frac{2}{\sqrt{3} - 1},$$

$$B = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{\sqrt{3} - 1}.$$

CORRESPONDANCE.

M. Ch. Halphen. — *Au sujet de l'étude sur les champs de forces* (numéro de juin 1910). — Je dois rectifier une

erreur qui s'est glissée dans l'étude sur les champs de forces. Dans la deuxième Partie (§ 1) se trouve ce théorème : *Si $u(x, y, z) = \lambda$ est l'équation d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine, la fonction u est homogène*, qui est faux, comme sa démonstration.

L'exemple suivant, qui m'a été signalé par M. P. Appell,

$$\operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y + \operatorname{Log} z = \lambda$$

le montre clairement. Néanmoins, les conclusions de cette deuxième Partie subsistent :

1° Il n'y a rien à changer à la première forme du théorème du deuxième paragraphe : les lignes de force formant une congruence homothétique par rapport à un point, les surfaces de niveau, lorsqu'elles existent, sont homothétiques par rapport au même point.

La démonstration peut cependant être mise sous une forme légèrement différente, analogue à celle que va prendre la seconde partie de ce théorème et avec des hypothèses moins restrictives. Si nous écrivons ainsi le système (4) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta(x, y, z)}{\alpha(x, y, z)}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\gamma(x, y, z)}{\alpha(x, y, z)},$$

on voit que les lignes de force forment une congruence homothétique *si les quotients $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ sont des fonctions homogènes de degré zéro*, puisque les premiers membres, comme les seconds, ne changent pas quand x, y, z sont multipliés par k. Les surfaces de niveau, qui satisfont à l'équation

$$dx + \frac{\beta}{\alpha} dy + \frac{\gamma}{\alpha} dz = 0,$$

seront homothétiques par rapport à l'origine, pour la même raison.

2° Soit $u(x, y, z) = \lambda$ l'équation d'une famille de surfaces homothétiques par rapport à l'origine. Les cosinus directeurs

de la normale en un point (x, y, z) d'une de ces surfaces,

$$\alpha = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\beta = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\gamma = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}},$$

sont des *fonctions homogènes de degré zéro* en x, y, z. En effet, considérons une autre surface de la même famille; son plan tangent au point $x_1 = kx$, $y_1 = ky$, $z_1 = kz$, est, par hypothèse, parallèle au plan tangent à la première surface au point (x, y, z); et l'on a

$$\alpha(kx, ky, kz) = \alpha(x, y, z),$$
$$\beta(kx, ky, kz) = \beta(x, y, z),$$
$$\gamma(kx, ky, kz) = \gamma(x, y, z),$$

quel que soit k. Il en résulte que les quotients

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$$

ont aussi des fonctions homogènes de degré zéro. Donc les lignes de force, trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces, forment bien une congruence homothétique.

La faute en question n'entache donc pas le résultat.

CERTIFICAT D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Besançon.

Épreuve théorique. — I. Cours. — *Méthodes d'approximation dans les intégrales définies. Exposer les méthodes de Côtes, de Gauss.*

II. Problème. — *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$2y^3\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2y^2\frac{\partial z}{\partial y}-9x^2yz+12x^2=0:$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui vérifie cette équation et qui passe par la courbe dont les équations sont*

$$x=y,\qquad yz-3y=1.$$

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface ainsi définie.

Epreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^4\frac{d^4y}{dx^4}+7x^3\frac{d^3y}{dx^3}+7x^2\frac{d^2y}{dx^2}-6x\frac{dy}{dx}-2y=X,$$

$$X=-16x-\frac{54}{x}+x^2[297-324\log x+81(\log x)^2].$$

(Novembre 1909.)

Dijon.

Épreuve écrite. — I. *On considère la surface*

$$x=3u-3uv^2-u^3,$$
$$y=3v-3u^2v-v^3,$$
$$z=3u^2-3v^2:$$

1° *Trouver ses lignes de courbure. Démontrer qu'elles sont planes. Trouver leurs plans;*

2° *Trouver ses lignes asymptotiques. Sous quel angle se coupent-elles? Quelle particularité présente la surface?*

3° *Comment a-t-on, sans calcul, une carte géographique de la surface (conservant les angles)?*

4° *Démontrer que* $\theta = x$, $\theta = y$, $\theta = z$ *sont trois solutions de l'équation*

$$(1 + u^2 + v^2)\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - 2v\frac{\partial \theta}{\partial u} - 2u\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Déduire de là un nouveau moyen d'avoir les lignes de courbure.

II. *Développer* $\frac{x^2}{4}$ *en série trigonométrique entre* $-\pi$ *et* π. *Que devient la série obtenue pour* $x = 0$ *et* $x = \pi$?

Épreuve pratique. — *Soit*

$$z = x\,\mathrm{L}(xy)$$

l'équation d'une surface (en coordonnées rectangulaires).

Évaluer, à 1^{mm^3} *près, le volume compris entre cette surface, le plan* Oxy, *le plan* Oxz, *le plan* $z = 3x$, *le plan* $x = 1^{\mathrm{cm}}$. (Juillet 1909.)

Composition. — *Considérant la surface* S *définie par*

$$ae^x + be^y + ce^z = 1 :$$

1° *Déterminer la courbe de contact* C_0 *de* S *avec le cylindre circonscrit dont les génératrices ont* α, β, γ *pour paramètre;*

2° *Démontrer que les courbes de contact* C *de* S *avec les cylindres dont les génératrices ont pour paramètres directeurs*

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha u}, \qquad \frac{\beta}{1 - \beta u}, \qquad \frac{\gamma}{1 - \gamma u},$$

u étant arbitraire, sont superposables à la courbe C_0;

3° *Former l'équation du cône directeur des génératrices de tous ces cylindres;*

4° *Montrer que, en chaque point* P *de* S, *se rencontrent deux courbes* C, *et calculer les coordonnées de* P *en fonction des valeurs du paramètre u qui correspondent à ces deux courbes;*

5° *Vérifier que ces deux courbes* C *sont conjuguées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$\frac{dy}{dx}\cos 2x + 2y \operatorname{tang} x + y^2 = 0;$$

2° *Intégrer l'équation*

$$a\frac{dy}{dx}\cos 2x = 3y^2 - 8y - 3$$

et vérifier que le rapport anharmonique de quatre solutions particulières est constant.

(Novembre 1909.)

Lille.

I. QUESTION DE COURS. — *Démontrer que toute courbe algébrique de genre* 1 *peut être, par une transformation birationnelle, transformée en une courbe du troisième ordre. Plus généralement, démontrer que toute courbe algébrique de genre p peut être transformée, de la même manière, en une courbe d'ordre* $p + 2$.

II. PROBLÈME. — *Pour que les courbes intégrales de l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

forment un système isotherme, il faut et il suffit que la fonction f satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. Former cette équation de condition et, en la supposant vérifiée, en déduire un facteur d'intégrabilité de l'équation (1).

(Novembre 1909.)

Marseille.

Composition écrite. — *On considère une surface* Σ *enveloppe d'une sphère variable* S *qui se déplace de sorte que son centre* C *décrive une circonférence donnée* O *et que son rayon soit constamment égal à la distance* CD *du point* C *à un diamètre fixe* A'A :

1° *Démontrer que ce mode de génération de la surface* Σ *fait connaître immédiatement sur celle-ci une première série de lignes de courbure, et l'un des rayons de courbure principaux en chacun de ses points*;

2° *Former l'équation générale d'un plan assujetti à passer sans cesse par la tangente à la circonférence* O *et à toucher une surface développable* D *dont chaque génératrice soit normale à la surface* Σ;

3° *En déduire les équations qui font connaître une ligne de courbure de la deuxième série : démontrer que chacune de ces lignes est dans un plan passant par* AA';

4° *Calculer l'angle sous lequel ce plan coupe la surface* Σ *et expliquer pourquoi cet angle est le même en tous les points d'une même ligne de courbure de la deuxième série.*

SOLUTION.

La caractéristique du plan a pour équations

$$\cos\theta(x - a\cos\theta) + \sin\theta(y - a\sin\theta) + \lambda z = 0,$$
$$-\sin\theta(x - a\cos\theta) + \cos\theta(y - a\sin\theta) + \lambda' z = 0$$

et pour paramètres directeurs

$$\lambda'\sin\theta - \lambda\cos\theta, \quad -\lambda\sin\theta - \lambda'\cos\theta, \quad +1.$$

Cette caractéristique doit être sur le cône-normalie de sommet C dont l'équation est

$$\cos^2\theta[(x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 - z^2]$$
$$= [\sin\theta(x - a\cos\theta) - \cos\theta(y - a\sin\theta)]^2,$$

d'où l'équation différentielle

$$\cos^2\theta\left[\frac{d\lambda^2}{d\theta^2}+\lambda^2+1\right]=\frac{d\lambda^2}{d\theta^2}.$$

Elle a pour intégrale générale

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(A\sin\theta-\frac{1}{A\sin\theta}\right).$$

En joignant aux équations de la caractéristique la valeur de λ et l'équation

$$x\sin\theta+y\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta,$$

on trouve

$$y=\frac{2a\sin^3\theta}{A^2\sin^2\theta+1},\qquad z=Ay.$$

Enfin on trouve pour l'angle demandé $\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$; c'est l'azimut du plan de la ligne de courbure par rapport au plan zOx.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer l'intégrale*

$$\int\frac{dz}{(z+1)\sqrt{z-1}}$$

le long d'un cercle de rayon inférieur à 2 *et dont le centre est au point* $z_0=-1$;

2° *Calculer la limite de la même intégrale le long d'un cercle de rayon infiniment petit entourant le point* $z_1=-1$;

3° *Calculer la limite de la même intégrale le long d'un cercle de rayon infiniment grand ayant pour centre l'origine;*

4° *Déduire des calculs précédents la valeur de l'intégrale réelle*

$$\int_{+1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}.$$

Vérifier directement le résultat et calculer la valeur numérique de cette intégrale à 0,001 *près.*

SOLUTION.

1° $\pi\sqrt{2}$; 2° et 3° zéro; 4° $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2,22$.

(Novembre 1909.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne l'équation*

$$u^3 - 3u + 2z^2 = 0,$$

qui définit u comme fonction algébrique de z :

1° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de la fonction u? Quelle est la nature du point $z = \infty$ relativement à cette fonction? Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points et en calculer les premiers coefficients;*

2° *Construire la surface de Riemann corrélative de l'équation proposée;*

3° *Former l'équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre, à laquelle satisfont les branches de la fonction u;*

4° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de cette équation différentielle? Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux et distinguer ceux qui sont vraiment singuliers, et non à apparence singulière. Examiner le cas du point $z = \infty$.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit*

$$v = \frac{u^3 + (z^2 + 4)(u^2 + 4u + 16)}{(z - 2)^2}$$

une fonction rationnelle de u et de z, u désignant la fonc-

tion algébrique de z définie par l'équation

$$u^2 = z^4 - 16.$$

Déterminer ses pôles et ses zéros, à distance finie ou infinie, ainsi que ses développements en série dans le domaine de ces points. On calculera les résidus et les premiers coefficients de ces développements.

(Juin 1909.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soit l'équation différentielle linéaire et homogène*

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p\frac{du}{dz} + qu = 0,$$

p et q étant des fonctions de z. On suppose que ces deux fonctions sont développables en séries entières en $z - z_0$, *absolument convergentes pour* $|z - z_0| \leqq R$.

Démontrer qu'en désignant par a_0 *et* a_1 *deux nombres arbitraires, il existe une série de la forme*

$$a_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots$$

dans laquelle les coefficients $a_2, a_3, \ldots$ *sont déterminés, convergente pour* $|z - z_0| < R$, *et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle.*

II. *On considère l'équation*

$$(u - 1)^2(u - 2)^3 - z^2(u - z)^2 = 0$$

qui définit u comme fonction algébrique de z :

1° *Construire la courbe représentée par cette équation;*

2° *Quels sont les points singuliers de la fonction algébrique ?*

3° *Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sachant que les racines de l'équa-*

tion

$$u^3 - 3u - 6z = 0$$

satisfont à l'équation différentielle

$$(9z^2 - 1)\frac{d^2u}{dz^2} + 9z\frac{du}{dz} - u = 0,$$

employer cette dernière à calculer, dans le domaine de l'origine, le développement en série de la racine qui, pour $z = 0$, *a la valeur initiale zéro.* (Octobre 1909.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

I. Question de cours. — 1° *Donner les diverses définitions de la torsion géodésique d'une ligne tracée sur une surface donnée. Conséquences de ces définitions. Faire voir que l'angle de torsion géodésique se conserve dans les transformations par inversion.*

2° *Énoncer et démontrer les théorèmes de Joachimstal relatifs à la ligne d'intersection de deux surfaces, ligne de courbure de l'une ou de l'autre.*

II. Problème. — *On donne la surface*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = f(u, v),$$

u, v *étant deux paramètres variables.*

Que doit être la fonction f *pour que cette surface admette comme lignes asymptotiques des courbes se projetant sur le plan des* x, y :

1° *Suivant des circonférences ayant pour centre* O;

2° *Suivant des spirales logarithmiques* $u = ce^{mv}$, *m désignant une constante donnée?* (Novembre 1908.)

Première question. — *Si l'on appelle* ε *l'angle des normales à une surface aux extrémités d'un arc infiniment petit* $MM' = ds$, ω *l'angle que la tangente à cet arc fait au point* M *avec la tangente conjuguée, démontrer la relation*

$$\left(\frac{\varepsilon}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{ds}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sin\omega + \frac{1}{R_1 R_2} = 0,$$

$\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ *étant les courbures principales au point* M.

Deuxième question. — *Étant donné l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c):$$

On demande de former l'équation des lignes de courbure projetées, parallèlement à l'axe des z, sur le plan d'une section cyclique.

Démontrer que ces projections obliques forment un double système de coniques ayant pour foyers communs les projections des ombilics. (Juin 1909.)

Question de cours. — 1° *Démontrer qu'il existe, sur toute surface, une équation différentielle du second ordre que vérifient à la fois les lignes de courbure et les lignes géodésiques;*

2° *Former cette équation différentielle;*

3° *Intégrer cette équation dans le cas où la surface est une quadrique; interpréter géométriquement l'intégrale trouvée dans le cas des surfaces à centre et dans le cas du paraboloïde.*

Problème. — *Déterminer les lignes de courbure et les courbures principales de la surface définie, en coor-*

données curvilignes, par les trois équations

$$x = \frac{c^2 - b^2}{bc}\,\frac{uv}{u+v}, \qquad y = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}\,\frac{v\sqrt{b^2-u^2}}{u+v},$$

$$z = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}\,\frac{u\sqrt{v^2-c^2}}{u+v}.$$

(Novembre 1909.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

798.

(1867, p. 95.)

Trouver dans une sinusoïde (transformée d'une ellipse quand on déroule un cylindre sur un plan) des arcs à différence rectifiable. Quelle est la courbe qui pour la sinusoïde joue le même rôle que l'ellipse homofocale dans la théorie des arcs elliptiques à différence rectifiable?

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Cette question, demeurée non résolue dans ce Journal, a été traitée par M. G. Teixeira dans un article du *Periodico di Matematica*, Livorno, t. XIX, 1904, p. 275-277, nota sull' applicazione, etc. (Note sur l'application du théorème de Fagnano aux arcs du limaçon de Pascal et de la sinusoïde).

Cet article a été inséré au Tome II de la réimpression de l'Œuvre mathématique de M. G. Teixera, 1906, p. 346-349, et résumé dans le *Traité*, du même géomètre, des *Courbes spéciales remarquables*, t. II, 1909, p. 34-35.

J'en donnerai simplement un extrait relatif à la sinusoïde

$$y = a \sin \frac{x}{m}.$$

Pour déterminer l'arc compris entre le point O et le point $M(x, y)$, on a l'équation

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{a^2 + m^2 - y^2}{a^2 - y^2}}\, dy,$$

ou, en faisant

$$y = a \sin \varphi, \qquad K = \frac{a}{\sqrt{a^2 + m^2}},$$

$$s = \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

et en posant

$$\sqrt{a^2 + m^2} = A, \qquad \int_0^\varphi \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = E(K, \varphi),$$

on a

$$s = A.E(K, C).$$

Ainsi l'arc de sinusoïde est représenté par l'arc d'une certaine ellipse.

Pour lui appliquer le théorème de Fagnano, soient M′ un autre point et B le premier sommet de la sinusoïde :

$$OM = A.E(K, \varphi); \qquad OM' = A.E(K, \psi);$$

$$OB = A.E\left(K, \frac{\pi}{2}\right),$$

et par conséquent l'égalité

$$E(K, \varphi) + E(K, \psi) - E\left(K, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{K^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}},$$

démontrée dans la théorie des intégrales elliptiques, donne

$$OM - OM' - OB = OM - BM' = \frac{AK^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

quand les angles φ et ψ sous liés par la relation

$$\cos\varphi\cos\psi = \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-K^2}.$$

Or, on a

$$\frac{AK^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} \cdot \frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{\sqrt{a^2+m^2-y^2}} = \frac{y^2}{T},$$

T représentant la longuenr MV de la tangente à la courbe au point M. Donc

$$OM - BM' = \frac{y^2}{T}$$

quand

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi = \frac{\sqrt{a^2-m^2}}{m}.$$

Mais si MN est la normale en M et PL une perpendiculaire à MN menée du point P projection de M sur Ox, on a

$$y = MP = T\sin MVO,$$
$$PL = y\sin NMP = y\sin MVO,$$

d'où

$$OM - BM' = PL.$$

Notes. I. — En raison de l'importance de cette proposition, il serait intéressant de savoir qui en est l'auteur. La question 798, en effet, n'est pas signée, mais il est bien curieux qu'elle soit, comme par hasard, précédée à la même page de quelques questions proposées par Ch. Hermite, à qui je suis ainsi porté à l'attribuer, en attendant une preuve plus décisive.

II. Les exemples de courbes présentant des arcs à différence rectifiable ne se bornent pas à ceux qui viennent d'être indiqués. M. G. Teixeira (*Ibid.*, 1909, p. 216) a cité les rosaces

$$\rho = c\sin m\omega,$$

podaires d'épicycloïde.

III. Plusieurs articles du Journal se rapportent à des propo-

sitions tout à fait analogues. Je me bornerai à rappeler les noms d'auteurs :

N. Fuss; M. Chasles; Gudermann; B. Tortolini (1848, 80); J.-A. Serret; O. Terquem (1844, 425-435, 506); Strebor [W. Roberts] (1844, 506; 1848, 135-137; 1852, 182-186).

IV. La seconde Partie de la question 798 reste à résoudre. Je pense que la solution en sera aisée d'après les indications données ci-dessus.

2137.

(1909, p. 384.)

En désignant par p un nombre premier, par a et b deux nombres premiers entre eux, le quotient de la division de $a^p - b^p$ par $a - b$ a tous ses diviseurs premiers de la forme $P = kp + 1$, à l'exception du diviseur p qu'il admet dans l'hypothèse $a - b = \text{mult. } p$, dans cette hypothèse seulement et qu'il admet alors une seule fois.

(G. F.)

SOLUTION

Par M. R. B.

1° Soit d'abord P un diviseur premier autre que p de $\dfrac{a^p - b^p}{a - b}$.

Je dis tout d'abord que P ne divise pas $a - b$. Supposons en effet qu'on ait

$$a - b \equiv 0 \pmod{P}$$

ou

$$b \equiv a \pmod{P};$$

on aura

$$\frac{a^p - b^p}{a - b} = a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1} \equiv pa^{p-1} \pmod{P}.$$

P ne divise ni p ni a (car, dans ce dernier cas, il diviserait aussi b, et l'on suppose a et b premiers entre eux).

Donc P ne peut diviser pa^{p-1} ou $\frac{a^p - b^p}{a - b}$.

Il résulte de là que les diviseurs premiers autres que p du nombre $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ sont les mêmes que les diviseurs premiers autres que p du nombre $a^p - b^p$.

Désignons maintenant par r une racine primitive de P. Soient α et β les indices respectifs de a et b, de sorte qu'on a

$$a \equiv r^\alpha \pmod{P},$$
$$b \equiv r^\beta \pmod{P},$$

avec

$$0 \leqq \alpha < P - 1, \qquad 0 \leqq \beta < P - 1$$

et

$$\alpha \neq \beta,$$

puisque $a - b$ n'est pas divisible par P.

On en tire

$$a^p - b^p \equiv r^{p\alpha} - r^{p\beta} \pmod{P}.$$

P divisant $a^p - b^p$, on doit donc avoir

$$p\alpha - p\beta \equiv 0 \quad [\mathrm{mod}\,(P - 1)]$$

ou

$$p(\alpha - \beta) = \lambda(P - 1),$$

λ étant un nombre entier. Le nombre premier p divise l'un au moins des nombres λ et $P - 1$. Il ne peut diviser le premier. Supposons en effet qu'on ait

$$\lambda = p\lambda'.$$

λ' étant un nombre entier, on aura

$$\alpha - \beta = \lambda'(P - 1);$$

λ' ne peut être nul, puisque α et β sont différents; on aura donc

$$\alpha - \beta \mid P - 1,$$

ce qui est incompatible avec les inégalités auquelles satisfont α et β. Le nombre p divise donc $P - 1$, et l'on peut écrire

$$P = kp + 1.$$

C. Q. F. D.

2° Cherchons maintenant à quelle condition $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ sera divisible par p. Posons

$$a = b + h.$$

On en tire

$$\frac{a^p - b^p}{a - b} = \frac{(b + h)^p - b^p}{h}$$
$$= pb^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} b^{p-2} h + \ldots + pbh^{p-2} + h^{p-1}.$$

Dans ce développement, tous les termes, à l'exception du dernier, ont des coefficients divisibles par p. On a donc

$$\frac{a^p - b^p}{a - b} \equiv h^{p-1} \pmod{p}.$$

Pour que le premier membre soit divisible par p, il faut et il suffit que h, c'est-à-dire $a - b$, soit divisible par p.

Dans cette hypothèse, on aura visiblement

$$\frac{a^p - b^p}{p(a - b)} \equiv b^{p-1} \pmod{p}.$$

Le second nombre n'est pas divisible par p; par conséquent, le nombre $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ n'admet le diviseur p qu'une seule fois.

Toutes les parties de l'énoncé sont donc établies.

2138.

1909, p. 284.

Étant donné un point D dans le plan d'un triangle ABC, on considère une sphère variable tangente à ce plan au

point D; *si, par chaque côté du triangle, on mène à cette sphère un second plan tangent, le lieu du point* M *commun aux trois plans ainsi obtenus est la conique focale de la conique de foyer* D *qui est inscrite au triangle* ABC.

(G. F.)

SOLUTION

Par Mlle Rita Murège.

Appelons S la sphère variable tangente en D au plan ABC. Le cône de sommet M et circonscrit à S est un cône de révolution inscrit au tétraèdre MABC et, à cause du théorème de Dandelin, il coupe le plan ABC suivant la conique de foyer D inscrite au triangle ABC, conique qui est fixe. On retrouve, dès lors, un théorème connu : « Le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée est la conique focale de cette conique ».

Autres solutions par MM. Bouvaist, Klug, Lemaire et Parrod.

2139.

(1909, p. 38).

Soient (E) *et* (H) *une ellipse et une hyperbole dont chacune est la focale de l'autre. Si* S *est un point du plan de l'hyperbole* (H) *par exemple, le cône de sommet* S *qui contient l'ellipse* (E) *admet comme lignes focales les tangentes menées du point* S *à l'hyperbole* (H).

(G. F.).

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Soit T le point de contact d'une tangente à (H) issue de S; le cône de sommet T et de base (E) est un cône de révolution d'axe TS; les plans tangents menés par TS à ce cône sont

tangents au cône de sommet S et de base (E). Ces plans sont tangents au cercle de l'infini, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par Mlle Rita Murège, MM. Klug et Parrod.

M. Klug fait observer qu'il a déjà publié le même théorème dans *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* (**1905**, p. 137).

QUESTIONS.

2163. Étant donnés un tétraèdre et une droite, si les coordonnées de la droite rapportées au tétraèdre sont p, q, r, s, t, u, il existe deux systèmes de quatre droites ayant pour coordonnées

$$\begin{array}{lrrrrrr}
(d) & p & q & r & s & t & u, \\
(a) & -p & q & r & -s & t & u, \\
(b) & p & -q & r & s & -t & u, \\
(c) & p & q & -r & s & t & -u; \\
(\delta) & p & q & r & -s & -t & -u, \\
(\alpha) & -p & q & r & s & -t & -u, \\
(\beta) & p & -q & r & -s & t & -u, \\
(\gamma) & p & q & -r & -s & -t & u.
\end{array}$$

Chacune des droites du premier système rencontre chacune des droites du second système, et les rapports anharmoniques des deux systèmes sont égaux ; on a, par exemple,

$$(d, a, b, c) = (\delta, \alpha, \beta, \gamma) = -\frac{qt}{ru}.$$

Réciproquement, si deux systèmes de quatre droites sont tels que chaque droite du premier système rencontre chaque

droite du second système, les rapports anharmoniques des deux systèmes étant égaux, ces deux systèmes dérivent d'un tétraèdre de la manière indiquée ci-dessus.

(G. Fontené.)

2164. Les quadriques Σ' en nombre doublement infini, qui sont conjuguées par rapport à un tétraèdre donné et qui sont tangentes à une droite donnée d, sont tangentes à deux systèmes de quatre droites (d, a, b, c) et $(\delta, \alpha, \beta, \gamma)$; l'une de ces quadriques, Σ_0, contient les huit droites. Les quadriques du faisceau ponctuel défini par la quadrique Σ_0 et l'une des quadriques du système font partie du système : il en est de même des quadriques du faisceau tangentiel défini par la quadrique Σ_0 et l'une des quadriques du système; les faisceaux ponctuels sont en nombre simplement infini, il en est de même des faisceaux tangentiels, et chaque quadrique Σ est déterminée par le faisceau ponctuel et par le faisceau tangentiel dont elle fait partie. L'enveloppe des plans polaires d'un point P par rapport aux quadriques Σ est une conique dont le plan est le plan polaire du point P par rapport à la quadrique Σ_0, et qui est inscrite au tétraèdre; le lieu des pôles d'un plan p par rapport aux quadriques Σ est un cône dont le sommet est le pôle du plan p par rapport à la quadrique Σ_0, et qui est circonscrit au tétraèdre.

(G. Fontené.)

[D6d]

THÉORIE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Cette Note renferme un exposé assez complet d'une théorie dont on ne donne le plus souvent que le strict nécessaire ; j'ai apporté un soin extrême à la rédaction, recherchant, à défaut d'autre mérite, celui de la netteté.

I. — FONCTIONS HYPERBOLIQUES DIRECTES.

1. On connaît la formule d'Euler

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x,$$

dans laquelle $\cos x$ *est une fonction paire et* $\sin x$ *une fonction impaire.* On écrit par analogie

$$(1) \qquad \begin{cases} e^{u} = \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u, \\ e^{-u} = \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u, \\ e^{2u} = \dfrac{1 + \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} u}, \end{cases}$$

et l'on définit ainsi trois fonctions d'une variable u liées par les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \\ \operatorname{th} u = \dfrac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} \end{cases} \qquad (\operatorname{ch} u > 0);$$

en réalité, c'est cette dernière relation qui sert de définition à la fonction $\operatorname{th} u$; si l'on observe (*voir* plus loin) que $\operatorname{ch} u$ est toujours positif, il résulte des formules (2) que $\operatorname{ch} u$ et $\operatorname{sh} u$ s'expriment en fonction de

$\operatorname{th} u$ par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 u}}, \\[2ex] \operatorname{sh} u = \dfrac{\operatorname{th} u}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 u}}. \end{cases}$$

Les notations ch, sh, th se lisent respectivement *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique*, *tangente hyperbolique*, et ces dénominations seront justifiées [1]. La variable u d'une fonction hyperbolique prend le nom d'*argument*.

2. On a donc

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}, \\[2ex] \operatorname{sh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}, \\[2ex] \operatorname{th} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}. \end{cases}$$

3. La fonction $\operatorname{ch} u$ est, comme on l'a dit, une fonction paire ; elle est essentiellement positive. La fonction $\operatorname{sh} u$ est une fonction impaire, ayant le signe de u, et il en est de même de la fonction $\operatorname{th} u$. La variation de ces fonctions est résumée par le Tableau suivant :

u	$-\infty$		0		$+\infty$
ch	$+\infty$	décroît	1	croît	$+\infty$
sh	$-\infty$	croît	0	croît	$+\infty$
th	-1	croît	0	croît	$+1$

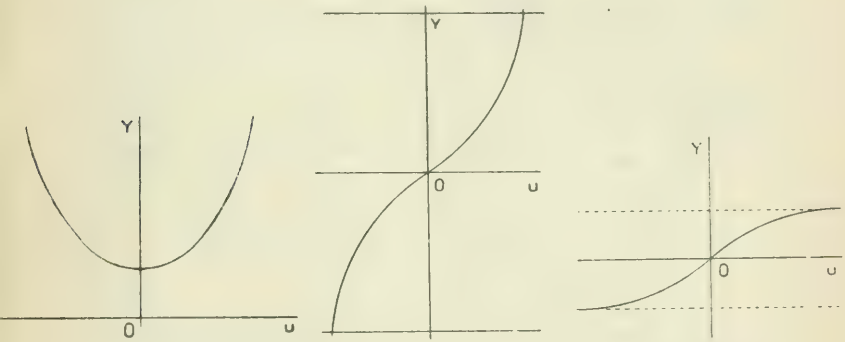
[1] L'ordre adopté ici pour l'exposition analytique cadre bien avec celui de l'exposition géométrique, pour laquelle on établit d'abord (§ IV) la formule de Mercator

$$u = \mathrm{L}(x+y) \qquad \text{ou} \qquad e^u = x + y.$$

Un cosinus hyperbolique est l'inverse du cosinus circulaire d'un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et l'on peut choisir l'arc qui a même signe que l'argument si celui-ci est donné. Un sinus hyperbolique est une tangente circulaire, une tangente hyperbolique est un sinus circulaire, et l'on peut prendre l'arc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Nous reviendrons sur ce point, en considérant l'angle τ qui est l'amplitude hyperbolique de l'argument u.

On a les courbes suivantes, dont la première est une chaînette :

Fig. 1.



$y = \operatorname{ch} u$, $y = \operatorname{sh} u$, $y = \operatorname{th} u$.

4. L'identité

$$e^{u+v+\ldots} = e^u \times e^v \times \ldots$$

donne

$$(5) \qquad \begin{aligned} \operatorname{ch}(u+v+\ldots) + \operatorname{sh}(u+v+\ldots) &= (\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u)(\operatorname{ch} v + \operatorname{sh} v)\ldots \\ &= (\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u)(\operatorname{ch} v + \operatorname{sh} v)\ldots \end{aligned}$$

Cette relation, jointe à celle que l'on obtient en changeant les signes des arguments, donne les formules d'addition des fonctions hyperboliques. On a pour

deux arguments

$$(6)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch}(u-v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v, \\ \operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, \\ \operatorname{th}(u+v) = \dfrac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}. \end{cases}$$

On a en particulier

$$(7)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u, \\ \operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u, \\ \operatorname{th} 2u = \dfrac{2 \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th}^2 u}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} u = \operatorname{ch}^2 \dfrac{u}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{u}{2}, \\ \operatorname{sh} u = 2 \operatorname{sh} \dfrac{u}{2} \operatorname{ch} \dfrac{u}{2}, \\ \operatorname{th} u = \dfrac{2 \operatorname{th} \dfrac{u}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \dfrac{u}{2}}; \end{cases}$$

on en déduit

$$(8)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch} u + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \dfrac{u}{2}, \\ \operatorname{ch} u - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \dfrac{u}{2}, \\ \dfrac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u + 1} = \operatorname{th}^2 \dfrac{u}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{th} \dfrac{u}{2}, \\ \dfrac{\operatorname{ch} u + 1}{\operatorname{sh} u} = \coth \dfrac{u}{2}, \end{cases}$$

la fonction coth étant l'inverse de la fonction th.

On a encore

$$(9)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch} u = \dfrac{1 + z^2}{1 - z^2}, \\ \operatorname{sh} u = \dfrac{2z}{1 - z^2}, \\ \operatorname{th} u = \dfrac{2z}{1 + z^2}, \end{cases} \qquad \operatorname{th} \frac{u}{2} = z.$$

On transformerait facilement en produits les quantités $\operatorname{ch} p \pm \operatorname{ch} q$, $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q$.

5. La définition des fonctions hyperboliques donne

immédiatement

$$(10)\quad (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u, \qquad (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u, \qquad (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

II. — Fonctions hyperboliques inverses.

6. La quantité $\arg \operatorname{ch} x$ a deux valeurs opposées pour une même valeur de x; chacune des quantités $\arg \operatorname{sh} x$, $\arg \operatorname{th} x$ est bien déterminée si l'on se donne x.

De même que les fonctions hyperboliques directes s'expriment au moyen de la fonction exponentielle, les fonctions hyperboliques inverses s'expriment au moyen de la fonction inverse de l'exponentielle, c'est-à-dire au moyen du logarithme. On pourrait partir des relations (4), multiplier les deux termes de chacun des seconds membres par e^u, résoudre par rapport à e^u, ...; mais cette résolution est toute faite par les formules (1), en tenant compte de la première des relations (2). On a ainsi, en remplaçant par exemple $\operatorname{ch} u$ par x, et u par $\arg \operatorname{ch} x$,

$$(11)\quad \begin{cases} \arg \operatorname{ch} x = \mathrm{L}(x + \varepsilon\sqrt{x^2-1}), \qquad x > 1, \\ \quad \varepsilon \text{ étant le signe de l'argument,} \\ \arg \operatorname{sh} x = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2+1}), \\ \arg \operatorname{th} x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\dfrac{1+x}{1-x}, \qquad -1 < x < 1; \end{cases}$$

les deux nombres $x \pm \sqrt{x^2-1}$ sont inverses, et leurs logarithmes sont bien deux nombres opposés.

7. Voici les dérivées de ces fonctions :

$$(12)\quad \begin{cases} (\arg \operatorname{ch} x)' \text{ ou } \left[\mathrm{L}(x + \varepsilon\sqrt{x^2-1})\right]' = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{x^2-1}}, \\ \quad \varepsilon \text{ étant le signe de l'argument.} \\ (\arg \operatorname{sh} x)' \text{ ou } \left[\mathrm{L}(x + \sqrt{x^2+1})\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\ (\arg \operatorname{th} x)' \text{ ou } \left[\dfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\dfrac{1+x}{1-x}\right]' = \dfrac{1}{1-x^2}; \end{cases}$$

dans cette dernière formule x est supposé compris entre -1 et $+1$, mais on a encore, en introduisant la fonction coth, inverse de la fonction th,

$$(\arg\coth x)' \quad \text{ou} \quad \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{x+1}{x-1}\right]' = \frac{1}{1-x^2},$$

pour $x^2 > 1$.

On a donc les intégrales indéfinies suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int \frac{dx}{\varepsilon\sqrt{x^2-1}} = \arg\operatorname{ch} x \quad \text{ou} \quad \mathrm{L}\left(x-\varepsilon\sqrt{x^2-1}\right) & (x>1), \\ \text{l'argument ayant le signe } \varepsilon, & \\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \arg\operatorname{sh} x \quad \text{ou} \quad \mathrm{L}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), & \\ \displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg\operatorname{th} x \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x} & (x^2<1), \\ \displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg\coth x \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{x-1}{x-1} & \left(\begin{array}{c} x>1 \\ \text{ou} \\ x<-1 \end{array}\right) \end{array}\right.$$

et l'on peut écrire dans tous les cas

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left|\frac{1-x}{1-x}\right|;$$

au point de vue de l'intégrale définie, cette dernière formule suppose que la variable ne traverse aucune des deux valeurs 1 et -1; au même point de vue, pour la première des intégrales (13), ε peut changer d'une limite de l'intégration à l'autre : on considère $\int_A^B \frac{dx}{y}$, quand le point (x, y) se déplace de A en B sur la branche de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$ qui correspond à x positif.

III. — Amplitude hyperbolique.

8. On a vu qu'un cosinus hyperbolique est l'inverse d'un cosinus circulaire positif, ... La comparaison des

formules

$$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1, \qquad \sec^2\tau - \operatorname{tang}^2\tau = 1$$

conduit à définir pour chaque argument u un angle correspondant τ par les formules concordantes

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{ch} u \cos\tau &= 1, \\ \operatorname{sh} u &= \operatorname{tang}\tau \\ \operatorname{th} u &= \sin\tau, \end{aligned} \right. \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}\right),$$

et l'on dit que l'angle τ est l'*amplitude hyperbolique* de l'argument u; on a ce Tableau :

τ	$-\frac{\pi}{2}$	croît	$+\frac{\pi}{2}$
u	$-\infty$	croît	$+\infty$.

On peut remarquer que la relation entre u et τ est traduite graphiquement par ce fait : la tangente au point u de la chaînette (*fig.* 1) fait avec l'axe des u un angle égal à τ; la relation $y = \operatorname{ch} u$ donne en effet $y'_u = \operatorname{sh} u = \operatorname{tang}\tau$. $\left(\text{La relation } y = \frac{1}{\cos\tau} \text{ donne la propriété de la tractrice.}\right)$

9. Si l'on écrit

$$\cos\tau = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin\tau = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \operatorname{tang}\frac{\tau}{2} = t,$$

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{2t}{1 - t^2},$$

la comparaison de ces formules avec les formules (9) montre que l'on aura $\operatorname{ch} u . \cos\tau = 1$, $\operatorname{sh} u = \operatorname{tang}\tau$, $\operatorname{th} u = \sin\tau$, en faisant $z = t$; on arrive ainsi d'une manière naturelle à la relation

$$(15) \qquad \operatorname{th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\tau}{2},$$

due, je crois, à M. Laisant, et qui suffit à déterminer complètement l'angle τ en fonction de u.

On se rend bien compte de cette formule en écrivant, d'après les relations (14),

$$\operatorname{tang}\frac{\tau}{2} = \frac{1-\cos\tau}{\sin\tau} = \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{sh} u} = \operatorname{th}\frac{u}{2}.$$

10. Pour introduire l'exponentielle e^u dans la définition de τ, il suffit d'appliquer la dernière des formules (1) à l'argument $\frac{u}{2}$, et de remplacer $\operatorname{th}\frac{u}{2}$ par $\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}$. On a ainsi

$$e^u = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right), \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} & u \operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right), \\ & \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang} e^u; \end{aligned}\right. \tag{17}$$

$\frac{\tau}{2}$ étant compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}$ est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

On voit qu'une Table donnant les valeurs de $\sin\tau$, $\cos\tau$, $\operatorname{tang}\tau$ peut donner en même temps les valeurs de $\operatorname{th} u$, $\operatorname{ch} u$, $\operatorname{sh} u$. (*Voir* J. Houel, *Recueil de formules et de Tables numériques.*)

IV. — Interprétation géométrique.

Les formules (1′), (2′), ... données ici correspondent aux formules (1), (2), ... données précédemment.

11. Lorsqu'il s'agit des fonctions circulaires, le nombre qui mesure l'arc évalué en parties du rayon mesure en même temps le double de l'aire du secteur

circulaire correspondant. Considérons (*fig.* 2) la branche d'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x > 0,$$

et soit u le *double de l'aire* du secteur hyperbolique AOM, les coordonnées du point M étant x et y. On a

$$du = x\,dy - y\,dx,$$
$$0 = x\,dx - y\,dy,$$

et, en ajoutant,

$$du = (x - y)(dx + dy) = \frac{d(x + y)}{x - y} = d\,\mathrm{L}(x + y),$$
$$u = \mathrm{L}(x + y);$$

cette formule est due à Mercator (*Logarithmotechnia*, 1668).

On a donc

$$(1') \quad \begin{cases} u = \mathrm{L}(x + y), \\ -u = \mathrm{L}(x - y), \\ 2u = \mathrm{L}\,\dfrac{1 - m}{1 - m}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} e^u = x + y, \\ e^{-u} = x - y, \\ e^{2u} = \dfrac{1 - m}{1 - m}, \end{cases}$$

avec

$$(2') \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \qquad x > 0, \\ m = \dfrac{y}{x}; \end{cases}$$

et l'on voit que, *la lettre u désignant le double de l'aire du secteur hyperbolique* AOM, *les coordonnées x et y du point* M *sont* ch u *et* sh u, *le coefficient angulaire m de la droite* OM *est* th u.

Ainsi s'explique le nom de fonctions hyperboliques donné aux expressions ch u, sh u, th u. La branche d'hyperbole équilatère considérée est en même temps la meilleure courbe représentative de la variation de ces fonctions.

La dernière des formules (1') peut s'écrire, en dési-

gnant par μ l'angle xOM.

$$(1'')\quad \begin{cases} 2u = L\left(\dfrac{1+m}{1-m}\right) = L\,\mathrm{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}-\mu\right), \\ e^{2u} = \dfrac{1-m}{1-m} = \mathrm{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}-\mu\right). \end{cases}$$

12. Si l'on a entre des aires AOM, AOM_1, AOM_2, ... la relation

$$u = u_1 + u_2 + \ldots,$$

on a, d'après la formule de Mercator,

$$(5')\quad \begin{cases} x - y = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ldots, \\ x - y = (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ldots, \\ \mathrm{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu\right) = \mathrm{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu_1\right)\mathrm{tang}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mu_2\right)\ldots. \end{cases}$$

Moivre s'est occupé le premier de la multiplication du secteur hyperbolique par un nombre entier et a obtenu, pour $u = nu_1$,

$$x - y = (x_1 - y_1)^n$$

(*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, 1730); c'est ainsi qu'il a été conduit, en passant de l'hyperbole équilatère au cercle, à la célèbre formule qui porte son nom [1].

13. Si l'on définit ch u et sh u comme étant les coordonnées du point M, avec $u = 2$ sect. hyp. AOM, il est facile d'établir géométriquement les formules d'addition des fonctions hyperboliques, comme je l'ai montré ailleurs (*Mathesis*, 1900, p. 241). La démonstration classique des formules d'addition des fonctions circulaires, que l'on se propose d'imiter, repose en effet

---

[1] Les quelques renseignements historiques donnés ici sont empruntés à un article de Hoüel (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 417).

uniquement sur la possibilité de déplacer l'origine des arcs; or le déplacement analogue dans le cas des fonctions hyperboliques est parfaitement réalisable, en considérant deux diamètres conjugués au lieu de considérer les axes. Je me bornerai sur ce sujet à cette simple indication.

Lorsqu'on procède ainsi, les dérivées des fonctions hyperboliques s'obtiennent comme celles des fonctions circulaires.

14. En ce qui concerne les fonctions hyperboliques inverses, on a ceci : *Dans la formule de Mercator,*

$$u = \mathrm{L}(x + y) \qquad (x^2 - y^2 = 1,\ x > 0),$$

x et y sont $\mathrm{ch}\,u$ *et* $\mathrm{sh}\,u$, de sorte que u est l'argument qui correspond à un cosinus hyperbolique égal à x, à un sinus hyperbolique égal à y; on a ainsi, en désignant par ε le signe de y,

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \arg \mathrm{ch}\, x = \mathrm{L}(x + y) = \mathrm{L}(x - \varepsilon\sqrt{x^2 - 1}), \\ u &= \arg \mathrm{sh}\, y = \mathrm{L}(x + y) = \mathrm{L}(y + \sqrt{y^2 + 1}), \\ u &= \arg \mathrm{th}\, m = \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\frac{1 + m}{1 - m}\right) \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

On a

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{y}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{x}, \qquad\qquad u = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dy}{x}, \\ \frac{du}{dm} &= \frac{1}{1 - m^2}, \end{aligned} \right.$$

---

(1) Bien entendu, en ce qui concerne la formule de Mercator, on aurait pu exprimer du en fonction de x seul ou de y seul, et obtenir $u = \mathrm{L}(x + \varepsilon\sqrt{x^2 - 1})$, ... en supposant connue l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

comme on le voit immédiatement par les relations écrites au début du n° 11.

15. Le point M de l'hyperbole correspond à l'argument u, et le point M′ du cercle à l'amplitude τ, de sorte qu'on a

$$u = 2 \text{ sect. hyp. AOM}, \qquad \tau = 2 \text{ sect. circul. AOM}';$$

la formule $\operatorname{ch} u . \cos\tau = 1$ donne d'abord $\text{OP}.\text{OP}' = \overline{\text{OA}}^2$, de sorte que P et P′ sont conjugués par rapport à l'hyperbole et par rapport au cercle : MP′ est la tangente à l'hyperbole, M′P est la tangente au cercle. Les formules $\operatorname{sh} u = \operatorname{tg}\tau$, $\sin\tau = \operatorname{th} u$, donnent $\text{PM} = \text{AT}'$, $\text{P}'\text{M}' = \text{AT}$.

Les points A′, M′, M *sont en ligne droite*, car la condition pour qu'il en soit ainsi, savoir $\frac{\text{P}'\text{M}'}{\text{P}'\text{A}'} = \frac{\text{PM}}{\text{PA}'}$, devient successivement, par élévation au carré,

$$-\frac{\text{P}'\text{A}.\text{P}'\text{A}'}{\overline{\text{P}'\text{A}'}^2} = \frac{\text{PA}.\text{PA}'}{\overline{\text{PA}'}^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\text{P}'\text{A}}{\text{P}'\text{A}'} = \frac{\text{PA}}{\text{PA}'},$$

ce qui a lieu; *ce fait donne une construction très simple du point* M′ *d'après le point* M.

La polaire du point A′ par rapport au système des deux droites P′M′, PM est la tangente en A ; les tangentes MP′ et M′P se coupent donc en un point I situé sur la tangente en A.

La relation $\operatorname{th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\tau}{2}$ s'interprète comme il suit : Le point M de l'hyperbole et le point M′ du cercle se rapportant respectivement à un argument u et à l'amplitude correspondante τ, *la droite* ON *qui se rapporte à l'argument* $\frac{u}{2}$ *se confond avec la bissectrice de l'angle* AOM′ ; cette bissectrice est d'ailleurs la

droite OI; elle est parallèle à la droite A'M, et ce fait se retrouvera plus loin (n° 18) : il en résulte que, lorsqu'on pose

$$\operatorname{th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\tau}{2} = t,$$

t est le coefficient angulaire de la droite A'M'M (paramètre unicursal pour l'hyperbole et pour le cercle).

La transformation qui donne la formule (1'')

$$2u = \mathrm{L}\left(\frac{1+m}{1-m}\right) = \mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right),$$

$$e^{2u} = \frac{1+m}{1-m} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right),$$

a été appliquée précédemment au point N, dont l'argument est $\frac{u}{2}$ et pour lequel μ a la valeur $\frac{\tau}{2}$; c'est ainsi que l'on a obtenu au n° 10

$$u = \mathrm{L}\frac{1+t}{1-t} = \mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right),$$

$$e^{u} = \frac{1+t}{1-t} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right).$$

L'accord des formules

$$2u = \mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right),$$

$$u = \mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau}{2}\right),$$

exige naturellement qu'on ait

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right) = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right);$$

cette relation résulte de ce qu'on a vu au n° 12, l'argument du point M étant double de celui du point N, et les valeurs des angles xOM et xON étant μ et $\frac{\tau}{2}$;

cette même relation équivaut d'ailleurs à la relation $\operatorname{tang}\mu = \sin\tau$, le second membre ayant pour valeur $\frac{1-\sin\tau}{1-\sin\tau}$.

V. — L'hyperbole équilatère rapportée a ses asymptotes.

16. Soient OX, OY les asymptotes de l'hyperbole équilatère, et désignons par X et Y les coordonnées d'un point M de la courbe par rapport à ce système d'arcs. On a les formules de transformation

$$Y\sqrt{2} = x - y,$$
$$X\sqrt{2} = x - y,$$

et l'équation de la courbe est

$$XY = \frac{1}{2}.$$

Les formules (1'), (1'') donnent, pour la branche de courbe qui correspond à X et Y positifs,

$$\left\{\begin{aligned} u &= L(Y\sqrt{2}), \\ -u &= L(X\sqrt{2}), \\ 2u &= L\operatorname{tang}XOM, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} e^{u} &= Y\sqrt{2}, \\ e^{-u} &= X\sqrt{2}, \\ e^{2u} &= \operatorname{tang}\widehat{XOM}; \end{aligned}\right.$$

la démonstration directe de ces formules serait d'ailleurs très simple.

17. Pour l'addition des arguments, on a ici

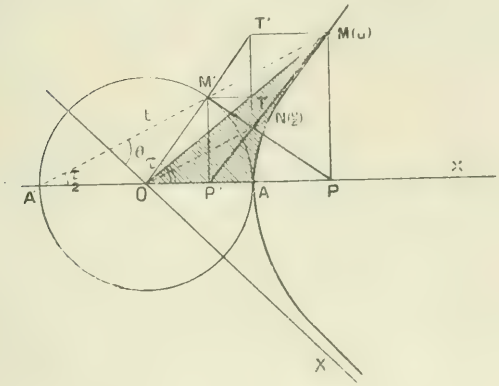
$$u = u_1 - u_2 \left\{\begin{aligned} YY_0 &= Y_1Y_2, \\ XX_0 &= X_1X_2, \\ \operatorname{tang}\widehat{XOM} &= \operatorname{tang}\widehat{XOM_1}\operatorname{tang}XOM_2, \end{aligned}\right.$$

X_0 et Y_0 étant les coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ du point A.

Par exemple, l'aire AOM étant double de l'aire AON, on a (*fig.* 2)

$$\operatorname{tang} \widehat{XOM} = \operatorname{tang}^2 \widehat{XON} = \operatorname{tang}^2 \theta.$$

Fig. 2.



18. Soient A et B les coordonnées d'un point C pris sur la courbe (*fig.* 3). On écrit, comme si l'on voulait introduire le paramètre unicursal $\frac{Y-B}{X-A}$,

$$\frac{Y}{B} = \frac{A}{X}, \qquad \frac{Y-B}{B} = \frac{A-X}{X},$$

d'où

$$\operatorname{tang}(X'X, CM) = \frac{Y-B}{X-A} = -\frac{B}{X} = -\frac{Y}{A},$$

et, par suite,

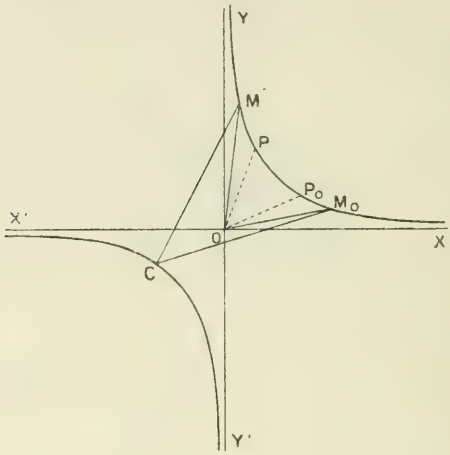
$$\operatorname{tang}^2(X'X, CM) = \frac{B}{A} \operatorname{tang}(OX, OM).$$

On a donc, en considérant un second point M_0,

$$\frac{\operatorname{tang}^2(X'X, CM)}{\operatorname{tang}^2(X'X, CM_0)} = \frac{\operatorname{tang}(OX, OM)}{\operatorname{tang}(OX, OM_0)}.$$

de sorte que, M_0 et M étant donnés, la valeur du rapport $\frac{\tang(X'X, CM)}{\tang(X'X, CM_0)}$ reste la même quel que soit le point

Fig. 3.



C pris sur la courbe, et égale à la racine carrée de la valeur du rapport $\frac{\tang(OX, OM)}{\tang(OX, OM_0)}$.

Pour chaque position du point C, menons OP_0 et OP parallèles à CM_0 et CM, de manière qu'on a

$$\frac{\tang(OX, OP)}{\tang(OX, OP_0)} = \sqrt{\frac{\tang(OX, OM)}{\tang(OX, OM_0)}};$$

d'après la dernière formule du n° 16, cette relation peut s'interpréter ainsi : *Le point* C *variant sur la courbe, l'aire du secteur variable* (OP_0, OP) *reste constante et égale à la moitié de l'aire du secteur invariable* (OM_0, OM).

Si l'on prend le point C en A', l'aire AON (*fig.* 2) est moitié de l'aire AOM, ON étant parallèle à A'M,

comme on l'a déjà vu à propos de la formule

$$\operatorname{th}\frac{u}{2} = \operatorname{tang}\frac{\zeta}{2}.$$

Le fait analogue pour le cercle est une traduction du théorème de l'angle inscrit; ce fait se conserve par projection pour l'ellipse, et l'on pourrait conclure de l'ellipse à l'hyperbole en invoquant le principe de continuité.

NOTE.

La question suivante, dont j'emprunte l'énoncé au *Cours de Mécanique* rédigé par M. Appell pour les élèves de Mathématiques spéciales, constitue un exercice intéressant sur l'angle amplitude.

Suivant quelle loi un point doit-il décrire une circonférence pour que son accélération soit proportionnelle à sa vitesse?

Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \tag{1}$$

on doit avoir, en désignant par α une constante que l'on peut supposer positive,

$$R^2\omega^4 - R^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \alpha^2 R^2 \omega^2,$$

ou encore

$$R^2\omega^4 - R^2\omega^2\left(\frac{d\omega}{d\theta}\right)^2 = \alpha^2 R^2 \omega^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon\omega\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}, \tag{2}$$

ou encore

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \varepsilon\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}. \tag{3}$$

La relation (2) a lieu entre ω et t, la relation (3) a lieu entre ω et θ; on peut écrire, ε' étant le signe de ω,

$$(2') \qquad \alpha\, dt = \frac{d\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)}{-\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\frac{\alpha^2}{\omega^2}-1}},$$

$$(3') \qquad d\theta = \frac{d\frac{\omega}{\alpha}}{\varepsilon\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}.$$

[De même que les formules $v = \frac{ds}{dt}$, $dv = \gamma_t\, dt$ donnent $v\, dv = \gamma_t\, ds$, qui conduit au théorème de la puissance vive, les formules $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $R\, d\omega = \gamma_t\, dt$ donnent $R\omega\, d\omega = \gamma_t\, d\theta$; on a ainsi $\gamma_t = R\frac{d\omega}{dt}$, $\gamma_t = R\omega\frac{d\omega}{d\theta}$, ce qui fournit les deux expressions de γ^2 employées ici.]

Première méthode. — On peut intégrer séparément (2') et (3'). On a d'abord, en plaçant l'origine des dates à l'instant où l'on a $\omega = \alpha$,

$$\alpha t = \arg\operatorname{ch}\frac{\alpha}{\omega},$$

l'argument, c'est-à-dire αt, ayant le signe $-\varepsilon\varepsilon'$; on a donc

$$\frac{\alpha}{\omega} = \operatorname{ch}\alpha t \qquad \text{ou} \qquad \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t};$$

avec t positif, si t augmente, $\frac{\alpha}{\omega}$ augmente, et il faut bien $-\varepsilon\varepsilon' = +$ dans la relation (2'); avec t négatif, il faut $-\varepsilon\varepsilon' = -$.

On a ensuite, en disposant de l'axe polaire,

$$\theta = \arccos\frac{\omega}{\alpha},$$

l'arc, c'est-à-dire θ, ayant le signe $-\varepsilon$; on a donc

$$\frac{\omega}{\alpha} = \cos\theta:$$

avec θ positif, si θ augmente de o à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\omega}{\alpha}$ diminue, et il faut bien $\varepsilon = -$ dans la relation (3'); etc.

On a donc

$$(4) \qquad \frac{\omega}{\alpha} = \cos\theta = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t},$$

et la loi du mouvement est donnée par la relation

$$(5) \qquad \cos\theta \times \operatorname{ch}\alpha t = 1.$$

Si l'on différentie la relation

$$\cos\theta \times \operatorname{ch}\alpha t = 1,$$

on obtient

$$\frac{\omega}{\alpha}\operatorname{tang}\theta = \operatorname{th}\alpha t;$$

on en déduit

$$(6) \qquad \sin\theta = \operatorname{th}\alpha t, \qquad \operatorname{tang}\theta = \operatorname{sh}\alpha t:$$

les formules (5) et (6) expriment que l'angle θ est ce qu'on appelle *l'amplitude de l'argument hypothétique* αt.

On a ce Tableau :

t	$-\infty$	o	$+\infty$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	o	$+\frac{\pi}{2}$
ω	o	α	o

Autre méthode. — Après avoir intégré l'équation

(2′), ce qui donne

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t},$$

on peut avoir recours à la relation (1); on a ainsi

$$d\theta = \frac{\alpha\, dt}{\operatorname{ch}\alpha t}$$

et, par suite,

$$\theta = 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{th}\frac{\alpha t}{2}\right),$$

ou

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \operatorname{th}\frac{\alpha t}{2};$$

c'est la formule de M. Laisant pour l'angle amplitude.

De même, après avoir intégré l'équation (3′), ce qui donne

$$\frac{\omega}{\alpha} = \cos\theta,$$

on peut avoir recours à la relation (1); on a ainsi

$$\alpha\, dt = \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

et, par suite,

$$\alpha t = \operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right);$$

c'est la relation (7) résolue cette fois par rapport à t.

Remarque. — Les valeurs de l'accélération tangentielle et de l'accélération normale sont respectivement

$$R\frac{d\omega}{dt} = \frac{-R\alpha^2 \operatorname{sh}\alpha t}{\operatorname{ch}^2\alpha t} = -R\alpha^2 \sin\theta\cos\theta.$$

$$R\omega^2 = \frac{R\alpha^2}{\operatorname{ch}^2\alpha t} = R\alpha^2\cos^2\theta:$$

si λ désigne l'angle du vecteur MO avec le vecteur accélération, on a donc

$$\operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang}\theta, \qquad \lambda = \theta;$$

en désignant par I le point où la direction du vecteur accélération rencontre l'axe polaire, le triangle OIM est isoscèle.

On a ce Tableau :

t	$-\infty$	$-t'$	0	$+t'$	$+\infty$
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$+\frac{\pi}{4}$	$+\frac{\pi}{2}$
ω	0	$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$	0
$\frac{d\omega}{dt}$	0	Max.	0	Min.	0

[H9f]

SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. V. JAMET.

M. Bricard [1], citant un travail du regretté professeur Raffy au sujet d'une certaine catégorie de surfaces, fait allusion à l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. Parmi les jeunes gens qui lisent cette publication, il en est peut-être qui trouveront quelque intérêt à savoir comment on peut établir cette équation, et comment on peut l'intégrer.

1° Soient

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + \beta$$

les équations d'une droite, mobile sur la surface, a, b, α, β, désignant des fonctions d'un même paramètre u.

---

[1] *Nouvelles Annales*, juillet 1910.

Si l'on désigne les dérivées de ces fonctions par a', b', α', β' et si l'on différentie la première d'entre elles par rapport à x, puis par rapport à y; enfin si l'on élimine $a'z + \alpha'$ entre les deux équations obtenues, on trouve

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x}}{-a\dfrac{\partial z}{\partial y}}.$$

En traitant de la même manière la deuxième de nos équations, on trouve

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y}}{-b\dfrac{\partial z}{\partial x}}.$$

De ces deux dernières équations résultent celles-ci :

$$(a) \qquad a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

et

$$(b) \qquad \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{b}{a}.$$

Différentions encore l'équation (a) par rapport à x et à y; éliminons $a'\dfrac{\partial z}{\partial x} + b'\dfrac{\partial z}{\partial y}$ entre les deux équations obtenues, et tenons compte de l'équation (b); nous trouvons

$$\frac{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}{a\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = -\frac{b}{a},$$

ou bien

$$(c) \qquad a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Traitons cette dernière équation (c) de la même manière. Nous en déduisons

$$(d)\qquad a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3a^2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

Enfin l'élimination de $\frac{b}{a}$ entre les équations (c), (d) nous fait connaître l'équation cherchée sous la forme

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} & 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \end{vmatrix} = 0.$$

2° Proposons-nous maintenant d'intégrer cette équation, comme si nous ne savions rien sur sa provenance. Si elle est vérifiée, il y a une solution commune aux deux équations suivantes

$$(e)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\lambda\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$(f)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3\lambda\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 3\lambda^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \lambda^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

où l'inconnue est désignée par λ. En différentiant la première, par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\lambda\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \lambda^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - 2\lambda\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \lambda^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0.$$

En ajoutant membre à membre ces deux dernières

équations, après avoir multiplié tous les termes de la deuxième par λ, et en tenant compte de l'équation (f), on trouve encore

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

De là deux hypothèses à examiner, suivant que l'un ou l'autre des deux facteurs ci-dessus est nul.

Si l'on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

l'équation (e) admet une racine double, et l'on en conclut

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

et l'intégrale qui s'ensuit est l'équation d'une surface développable.

Si, au contraire,

$$(g) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,$$

l'intégration de cette équation linéaire conduit au résultat suivant

$$y = \lambda x + f(\lambda),$$

f désignant une fonction arbitraire.

Soit encore

$$(h) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial z}{\partial y} = \mu;$$

on trouvera, par différentiation,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \lambda\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial y},$$

puis, en vertu des équations (e) et (g),

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (g) montre que le déterminant fonctionnel de λ et de μ doit être nul. On en conclut

$$(k) \qquad \mu = \varphi(\lambda),$$

φ désignant encore une fonction arbitraire.

Soit enfin

$$(l) \qquad z = x\varphi(\lambda) + \nu$$

et par conséquent

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(\lambda) + x\varphi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial y}.$$

On en déduit, en tenant compte des équations (g), (h), (k),

$$0 = \frac{\partial \nu}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \nu}{\partial y},$$

puis, en comparant cette dernière équation avec (g),

$$\nu = \psi(\lambda),$$

ψ désignant une fonction arbitraire. Donc l'équation (g) devient

$$z = x\varphi(\lambda) + \psi(\lambda),$$

et l'intégrale cherchée résultera de l'élimination de λ entre cette dernière équation et l'équation

$$y = \lambda x + f(\lambda),$$

trouvée antérieurement. Donc enfin l'équation aux dé-

rivées partielles (A) ne convient qu'aux surfaces réglées.

[R5a]

UN CAS PARTICULIER D'ATTRACTION D'UN CORPS SUR UN POINT ÉLOIGNÉ;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE,
Professeur au Lycée d'Alençon.

Soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

l'équation, par rapport à ses axes de symétrie $Gxyz$, de l'ellipsoïde central d'inertie d'un corps de forme quelconque et de masse M; un point de coordonnées x, y, z et situé à une grande distance r du centre de gravité G, étant attiré par chaque point du corps suivant la loi de Newton, la résultante de ces attractions sur le point est la force qui dérive du potentiel

$$V = \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^3}[(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2].$$

Il résulte de cette formule connue que le potentiel se réduit au potentiel newtonien $\frac{M}{r}$, lorsque le point attiré est sur une génératrice du cône équilatère du second ordre

$$(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2 = 0.$$

Ce cône ne se décompose en deux plans réels que si l'on a entre les moments principaux la relation

$$C + A - 2B = 0,$$

désignant le moment moyen. *Cette relation caractérise les ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux;* les plans cycliques centraux ont pour équations

$$x \pm z = 0;$$

ce sont, par conséquent, les plans bissecteurs des plans principaux qui se croisent suivant l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie.

Qu'il existe des ellipsoïdes d'inertie satisfaisant à la condition géométrique d'avoir leurs plans cycliques réels orthogonaux, cela est presque évident : en introduisant une représentation géométrique analogue à celle qui se trouve dans la *Mécanique* de Collignon (t. III, p. 465), l'existence de tels ellipsoïdes d'inertie est liée à celle de *triangles dont un côté est la moyenne arithmétique des deux autres côtés,* c'est-à-dire de *triangles tels que la droite qui joint le centre du cercle inscrit au centre de gravité est parallèle au côté moyen.* Des triangles de cette nature existent réellement et ont des propriétés faciles à découvrir ; on peut obtenir ces triangles, d'une façon continue, en joignant, entre eux et à un point quelconque de la courbe, les foyers d'une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$.

Revenons à la question de Mécanique, en supposant que l'ellipsoïde d'inertie du corps attirant est à plans cycliques orthogonaux et en remarquant que c'est précisément en les deux plans cycliques centraux que se décompose le cône équilatère. Si le point matériel attiré est assujetti, par une liaison bilatérale et sans frottement, à rester dans l'un quelconque de ces deux plans, et sur une droite passant par G, le potentiel se réduit au potentiel newtonien ; le point est donc soumis, en outre d'une force normale qui est détruite par la réaction de cette droite, à l'attraction qu'exercerait la masse totale M concentrée en G.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant : *Étant donné un corps dont l'ellipsoïde d'inertie a ses plans cycliques centraux orthogonaux, on assujettit un point matériel éloigné à rester sur une droite passant par* G *et située dans l'un quelconque de ces deux plans, ce point étant uniquement soumis aux forces attractives qui émanent des divers points du corps; dans ces conditions, ce point matériel décrira la droite comme s'il était libre et attiré par le point* G.

Voici une application numérique, dont j'emprunte une partie des calculs au beau problème de Mécanique rationnelle qui fit l'objet d'une composition pour le concours de 1890 de l'Agrégation des Sciences mathématiques.

Le corps attirant est un tétraèdre homogène OABC trirectangle en O et dont les arêtes ont respectivement pour longueurs

$$OA = \sqrt{2}, \qquad OB = 1, \qquad OC = \sqrt{3};$$

la masse étant prise égale à 80, afin de simplifier les coefficients, l'équation de l'ellipsoïde central d'inertie du tétraèdre est

$$12x^2 + 15y^2 + 9z^2 + 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{3}yz + 2\sqrt{6}zx = 1,$$

par rapport à des axes $G(x, y, z)$ parallèles aux arêtes OA, OB, OC; l'équation en S est

$$S^3 - 36S^2 + 412S - 1488 = 0,$$

et elle admet pour racines

$$A = 2(6 - \sqrt{5}), \qquad B = 12, \qquad C = 2(6 + \sqrt{5}).$$

On a donc $A + C - 2B = 0$, et les plans cycliques réels centraux sont orthogonaux; ces plans ont pour

équations

$$y - \sqrt{3}z = 0,$$
$$2\sqrt{2}x - 3y - \sqrt{3}z = 0.$$

Pour terminer, j'ajouterai que j'ai rencontré les ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux dans deux questions de Géométrie réglée relatives au complexe tétraédral et au complexe de M. G. Humbert. Ces mêmes ellipsoïdes se présentent en Optique, au titre d'ellipsoïdes des indices pour lesquels les axes de réfraction conique intérieure sont orthogonaux ; ces axes sont alors les bissectrices des axes extrêmes. Il existe des corps qui sont positifs pour certaines radiations, négatifs pour d'autres ; en adoptant la formule de dispersion de Cauchy, on calcule facilement une longueur d'onde pour laquelle les axes de réfraction conique intérieure sont orthogonaux. Ces considérations ont été développées, par M. Ulysse Lala, dans une Note, *Importance physique des ellipsoïdes à plans cycliques orthogonaux*, présentée à la session d'août 1910 (Toulouse) de l'Association française pour l'avancement des Sciences.

BIBLIOGRAPHIE.

Les Mathématiques en Portugal, par M. *Rodolphe Guimaraès* (2e édition). 1 volume in-4°. 1909 ; Coïmbre, Imprimerie de l'Université ; Paris, Gauthier-Villars.

La première édition de cet Ouvrage a été publiée en 1900, lors de l'Exposition universelle de Paris, et fut l'objet d'appréciations flatteuses et bien méritées.

Cette édition nouvelle est très soignée au point de vue typographique, et forme un gros volume dans lequel se trouvent des compléments d'un réel intérêt.

L'auteur y présente d'abord à grands traits l'histoire des Mathématiques en Portugal depuis les premiers temps de la monarchie portugaise jusqu'à nos jours. Dans ces 102 premières pages, se trouve mise en pleine lumière, et à juste titre, la figure du célèbre mathématicien Pedro Nunez : M. Guimaraès fait ensuite remarquer les progrès dus aux efforts successifs de Monteiro de Rocha, Anastasio da Cunha, Valente de Conto, Filippe Falque, Daniel de Silva, pour ne citer qu'un petit nombre des géomètres qui contribuèrent au développement des sciences mathématiques en Portugal et leur donnèrent un brillant essor. Enfin, un respectueux hommage, et bien équitable, est rendu au premier des mathématiciens portugais contemporains, nous avons nommé M. Gomes Teixeira.

La seconde partie de l'Ouvrage a trait à la bibliographie mathématique portugaise proprement dite ; cette bibliographie constitue un véritable catalogue systématique renfermant la mention d'environ 3000 Mémoires, Notes, Volumes ou brochures. Tous ces travaux sont classés d'après l'*Index* du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

M. Guimaraès ne se contente pas ici de transcrire simplement les travaux mentionnés ; il en donne, en outre, une sorte d'analyse, permettant de se faire une idée exacte du contenu de la plupart d'entre eux. Il résume les résultats, et parfois ne recule pas devant de judicieuses critiques, qui augmentent l'intérêt de l'Ouvrage et font disparaître la sécheresse que pourrait présenter une simple liste, quand même elle serait très exacte et très complète.

Un supplément contient la mention d'un petit nombre d'œuvres omises dans l'édition précédente. Quelques Notes sont destinées à compléter certaines analyses. Enfin, dans un Appendice figurent les Œuvres mathématiques publiées au cours de la période 1906-1908.

Telle est la substance du nouveau Volume que nous a donné M. Guimaraès. Nous disons à dessein « nouveau », car les additions introduites en augmentent de beaucoup l'importance.

Il y a là une œuvre profondément utile, un service rendu par l'auteur à son pays et en même temps aux mathématiciens de toutes les nations. Cela représente une somme de

travail et une patience telles que beaucoup auraient reculé devant la tâche; mais il y fallait aussi une grande érudition, un esprit mathématique très large et très compréhensif et, en outre d'une grande indépendance, mettant le culte de la vérité au-dessus de toute autre considération.

Depuis longtemps nous aurions voulu rendre compte, dans les *Nouvelles Annales*, de l'œuvre de M. Guimaraès, et en dire tout le bien que nous en pensons. Diverses circonstances ne nous l'ont pas permis, à notre regret. Mais ce retard est plus apparent que réel, car il s'agit d'un Ouvrage qui n'est pas éphémère, dont l'utilité subsistera pendant bien des années.

L'importance scientifique du Portugal est reconnue depuis longtemps; en matière mathématique, on peut dire qu'elle est considérable, relativement à l'étendue et à la population du pays. En prédisant que l'avenir sera digne du présent et du passé, nous sommes certain de ne pas être mauvais prophète. Et lorsqu'un successeur de M. Guimaraès fera le tableau des Mathématiques en Portugal dans un demi-siècle d'ici, il lui suffira de s'inspirer de son modèle pour recevoir de nos neveux l'hommage d'une approbation pareille à celle que nous apportons ici sans réserves.

C. A. L.

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne deux axes de coordonnées* Ox, Oy *rectangulaires et une ellipse dont deux sommets sont le point* O *et un point* A *situé sur* Ox, *et dont* Ox *est un axe. Calculer l'intégrale*

$$\int x^2\,dy - y^2\,dx,$$

étendue à la portion d'ellipse située au-dessous de l'axe des x, *depuis le point* O *jusqu'au point* A.

Variations de cette intégrale quand, le point A *restant*

fixe, l'ellipse varie; on prendra pour variable l'excentricité de l'ellipse.

On considère le mobile dont les deux coordonnées sont en fonction du temps

$$x = t^2,$$
$$y = t^2 - t.$$

Trajectoire. — Construire le diagramme des espaces, celui des vitesses. Rayon de courbure en un point de la trajectoire.

Épreuve pratique. — *On donne l'équation*

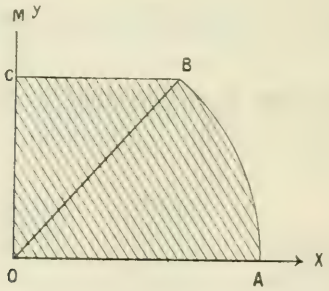
$$x^2 y'' + 3xy' + y = x^2 - 1,$$

démontrer qu'elle a des solutions entières en x et du second degré.

Démontrer que l'équation sans second membre a des solutions de la forme x^m et de la forme $x^m \log x$.

En déduire l'intégrale générale de l'équation. Déter-

Fig. 1.



miner la constante de façon que cette intégrale ne contienne pas de terme logarithmique. Construire celle des courbes trouvées qui coupe l'axe des x au point $x = 1$.

Calculer l'intégrale double

$$\int\int (x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

etendue à l'aire ci-contre

$$\widehat{AOB} = 60^\circ,$$
$$OA = 1,$$

BC *parallèle à* Ox. (Novembre 1909.)

Lille.

Première épreuve. — I. *Étant donnés dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, trouver dans ce plan une courbe telle que la sous-tangente soit égale à* Kx, K *désignant un nombre constant et* x *l'abscisse du point de contact; montrer qu'à certaines valeurs simples de* K *correspondent des courbes connues.*

II. 1° *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *construire la courbe* (C) *représentée par les équations*

$$x = 2a \sin^2\varphi \cos 2\varphi, \qquad y = 2a \cos^2\varphi \sin 2\varphi, \qquad z = 0;$$

x, y, z *désignent les coordonnées d'un point de la courbe,* a *est une longueur donnée et* φ *un paramètre variable.*

2° *Rectifier la courbe* (C).

3° *Trouver le lieu* (Γ) *des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à* (C), *construire la courbe* (Γ).

4° *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par le plan* xOy, *le cylindre droit dont la base est* (Γ) *et la surface engendrée par la rotation autour de* Oz *de la parabole*

$$x^2 = 2az, \qquad y = 0.$$

N. B. — Les candidats au diplôme d'ingénieur électricien ne feront pas la dernière partie de la question II.

Deuxième épreuve. — I. *Calculer la fonction de forces* U, (*ou le potentiel* V), *dans les cas suivants :*

1° *Force centrale fonction de la distance au centre;*

2° *Champs newtoniens;*

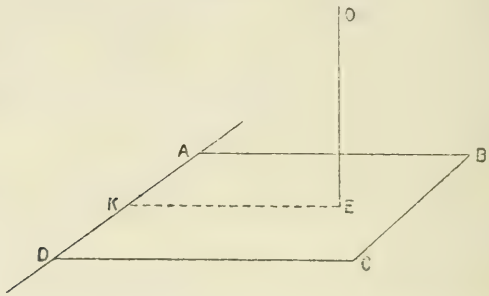
3° *Actions mutuelles de deux points.*

II. *Une plaque rectangulaire très mince* ABCD, *pesante*

et homogène, mobile sans frottement autour de son arête AD *supposée fixe et horizontale, est maintenue en équilibre dans une position horizontale, à l'aide d'un fil élastique* OE *placé verticalement et ayant son extrémité* O *fixe.*

On demande d'étudier les petites oscillations de cette plaque autour de sa position d'équilibre, en admettant

Fig. 2.



que le fil OE *soit parfaitement élastique, que sa masse soit négligeable, et que l'angle d'oscillation soit assez petit pour qu'on puisse confondre l'arc de ce cercle décrit par le point* E *avec une portion de droite verticale.*

Données : $AB = a = 20^{cm}$; $AD = b = 15^{cm}$; *distance du point* E *à l'arête* AD, $EK = l = 15^{cm}$; *poids de la plaque :* $p = 120^{g}$; *allongement spécifique du fil* OE : $\lambda = 10^{cm}$ *pour un poids de* 100^{g}. (Novembre 1908.)

Problèmes. — I. *a étant une longueur donnée, construire la courbe* (Γ) *représentée en coordonnées polaires par l'équation*

$$\rho = a\sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}.$$

Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère de rayon a dont le centre est au pôle et le cylindre droit qui a pour base la courbe (Γ).

Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes (Γ) *quand le paramètre a varie.*

II. 1° *a étant une longueur donnée, construire dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires la courbe* (C) *décrite, quand le paramètre t varie, par le point de coordonnées*

$$x = a(2\cos t + \cos 2t), \qquad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

2° *Former l'équation de la tangente à la courbe* (C) *en un point* M *correspondant à une certaine valeur* t_0 *du paramètre; calculer le coefficient angulaire* m *de cette tangente et remplacer dans son équation* t_0 *par son expression en fonction de* m.

3° *Montrer qu'il est en général possible de mener d'un point* P *du plan trois tangentes à la courbe* (C); *trouver le lieu que doit décrire le point* P *pour que deux de ces tangentes soient rectangulaires.*

Question de cours. — *Travail des forces appliquées à un système indéformable (translation élémentaire, rotation élémentaire, cas général).*

Épreuve pratique. — I. *On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et les courbes* (C), (C′) *représentées par les équations*

$$(C) \qquad y^2 = 9x,$$
$$(C') \qquad y^2 = 36(x-3)^3:$$

1° *Tracer ces courbes et déterminer les coordonnées de leurs points communs* A *et* B.

2° *Calculer l'aire de la région du plan limitée par la portion* AOB *de la courbe* C *et la portion* AB *de la courbe* C′.

Evaluer la longueur du contour qui limite cette aire.

(On calculera les résultats avec trois décimales.)

II. *Sur la base* B *d'un parallélépipède rectangle on pose une sphère qui a son point de contact au centre de cette base. Déterminer l'ellipsoïde d'inertie du système des deux corps par rapport au point de contact.*

La sphère, en cuivre, a $0^m,20$ *de rayon; son poids spécifique est* 8,85.

Le parallélépipède, en fer, a pour hauteur $0^m,75$ *et pour*

côtés de base $0^m,35$ *et* $0^m,25$; *son poids spécifique est* 7,8.

(Juillet 1909.)

Épreuve théorique. — I. *Étant donnés dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, trouver toutes les courbes telles que le carré de la sous-tangente relative à un point quelconque soit égal au produit de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point.*

II. 1° *Construire dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$x^2(x^2+y^2)+(b^2-a^2)x^2+b^2y^2=0,$$

où a *et* b *désignent deux longueurs données* $(b<a)$; *chercher l'équation de cette courbe en coordonnées polaires,* O *étant le pôle et* Ox *l'axe polaire.*

2° *Chaque point de cette courbe est le milieu d'une corde du cercle*

$$(c) \qquad x^2+y^2=a^2;$$

montrer que cette corde se projette orthogonalement sur Oy *suivant un segment de longueur* b.

3° *Calculer l'aire de la portion du plan limitée par* (Γ).

4° *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par le cylindre droit qui a pour base* (Γ) *et la sphère dont* (C) *est un grand cercle.*

Question de cours. — I. *Déviation élémentaire d'un point.*

II. *Propriétés des surfaces de niveau.*

Épreuve pratique. — Première question. — *Exemple numérique de la réduction d'un système de vecteurs. Positions respectives des vecteurs donnés par rapport au trièdre trirectangle* $Oxyz$:

Le vecteur OA *est situé dans le plan* xOy *et fait avec* Ox *un angle de* 30°.

Le vecteur OB *est situé dans le plan* xOz *et fait avec* Ox *un angle de* 60°.

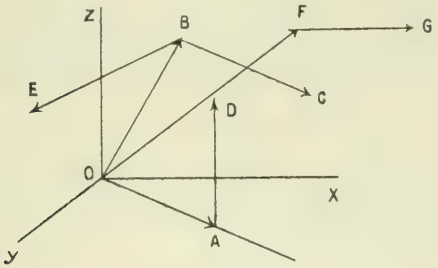
Le vecteur BC *est situé dans le plan* xOz *et perpendiculaire à* OB.

Les vecteurs AD *et* BE *sont parallèles respectivement à* Oz *et à* Oy.

Le vecteur OF *est situé dans le plan* AOz *et fait avec* OA *un angle de* 60°.

Le vecteur FG *est parallèle à* Ox.

Fig. 3.



Grandeurs respectives des vecteurs donnés :

$$OA = 2^m;\ OB = 3^m;\ BC = 2^m,5;\ AD = 2^m,5;\ BE = 3^m,5;$$
$$OF = 5^m;\ FG = 2^m.$$

Deuxième question. — *On donne trois axes de coordonnées rectangulaires et l'on considère la courbe définie par les équations*

$$(c) \qquad x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad z = t^4.$$

1° *Calculer la longueur de l'axe* OM, M *étant le point qui correspond à la valeur* $t = 1$.

2° *Par le point* A ($x = -1$, $y = -1$, $z = 0$) *passe un plan osculateur à la courbe* C.

Calculer avec deux décimales le t *du point de contact.*

(Novembre 1909.)

Marseille.

Composition écrite. — 1° *Expliquer pourquoi toutes les coniques représentées en coordonnées rectangulaires par*

une équation de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ont, quels que soient leurs coefficients, leurs axes parallèles aux axes de coordonnées.

2° *Déterminer* λ *de sorte que l'équation*

$$Ax^2 + Cy^2 + \lambda(y^2 - m^2x^2) + 2(y - mx) = 0$$

représente un cercle quand on connaît déjà A, C *et* m.

3° *Démontrer que ce cercle se confond avec le cercle osculateur à l'origine dans la conique représentée par*

$$Ax^2 + Cy^2 + 2(y - mx) = 0.$$

4° *Démontrer que le cercle et la conique ont tous leurs points communs situés sur les deux droites représentées ensemble par l'équation*

$$y^2 - m^2x^2 = 0$$

et qui sont également inclinées sur les axes de coordonnées.

5° *Se servir de ce résultat pour trouver le quatrième point d'intersection d'une ellipse et du cercle osculateur en l'un de ses points. On définira un point de l'ellipse au moyen du paramètre* φ *tel que, par rapport aux axes de la conique, on ait* $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. *Soit* φ' *le paramètre du quatrième point demandé, on devra trouver* $\varphi' = 2\pi - 3\varphi$.

6° *Tirer de là une construction du centre de courbure dans une ellipse.*

Épreuve pratique. — *On considère le mouvement rectiligne d'un mobile dans lequel l'espace parcouru* x *est donné en fonction du temps par la formule*

$$x = 3e^{-\frac{t}{12}}\sin\frac{\pi}{12}t \qquad (e = 2,71828),$$

t *étant exprimé en secondes et* x *en centimètres :*

1° *Indiquer l'allure générale du diagramme des espaces et en conclure les principales circonstances du mouvement;*

2° *Calculer avec la précision que comportent les données la position du mobile à l'époque* $t = 5$ **secondes.**

3° *Calculer les valeurs successives de* t *pour lesquelles* $x = 0$;

4° *Calculer les valeurs maxima de* x *et montrer qu'elles forment une progression géométrique décroissante dont on donnera la raison;*

5° *Calculer l'aire du premier arceau du diagramme des espaces qui s'étend de* $t = 0$ *à* $t = 12$.

Les calculs doivent être achevés et les résultats obtenus doivent être exprimés en nombres décimaux. L'usage de toute Table est autorisé.

SOLUTION.

2. $\log 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,477$

$\operatorname{colog} e^{-\frac{5}{12}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \bar{1},819$

$\log \sin 75^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \bar{1},985$

$\Sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0,281$

$$x = 1^{\text{cm}},91.$$

3. $t = 0, \quad 12, \quad 24, \quad \ldots.$

4. $t = 4^{\text{s}},82 + n.24, \quad \ldots,$

$$\text{raison} = e^{-1} = 0,37.$$

5. $3\,\frac{12}{\pi}\,\frac{1 + e^{-1}}{1 + \pi^2} = 32^{\text{cm}^2},111.$

(Juin 1909.)

COMPOSITION ÉCRITE. 1° *Les équations*

$$x^2 - y^2 - 2ax - h^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2by + h^2 = 0,$$

représentant deux familles de cercles lorsque les lettres a *et* b *représentent deux paramètres arbitraires, démontrer qu'un cercle quelconque de la première famille rencontre un cercle quelconque de la seconde orthogonalement.*

2° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y^2 - x^2 - 2x\frac{dy}{dx} - h^2 = 0$$

en prenant pour nouvelle fonction

$$2u = x^2 + y^2$$

et en gardant la variable indépendante x. On est ramené à une équation linéaire.

3° *L'équation de la première famille de cercles est l'intégrale générale de l'équation différentielle. Former l'équation différentielle qui convient à la seconde famille.*

4° *Calculer l'aire commune à deux cercles de la première famille, ces deux cercles correspondant l'un à une valeur positive du paramètre a, l'autre à une valeur négative de ce paramètre.*

Épreuve pratique. — *Un volant mobile autour d'un axe horizontal est mû par un poids attaché à l'extrémité d'une corde enroulée autour de l'axe. De plus, un décrochage automatique de l'extrémité de la corde fixée à l'axe se produit sitôt que le poids moteur arrive au sol, de sorte que le volant continue alors à tourner librement en vertu de la vitesse acquise.*

On donne :

Le poids moteur, $W = 100^{kg},5$;

La hauteur de chute du poids, $H = 20^{m},33$;

Le nombre de tours du volant pendant la chute du poids, $n = 75$;

Le nombre total de tours du volant depuis la mise en marche jusqu'au repos, $n' = 200$;

Le temps de chute du poids, $t = 75$ secondes.

Le volant part du repos et l'on demande de calculer avec la précision que comportent les données :

1° *L'énergie potentielle du poids moteur;*

2° *La vitesse de ce poids au moment où il atteint le sol;*

3° *L'énergie cinétique du poids moteur au même instant;*

4° *L'énergie cinétique du volant, abstraction faite des frottements, au même instant;*

5° *La vitesse en tours par minute du volant;*

6° *L'énergie cinétique du volant pour une révolution par minute;*

7° *L'énergie absorbée par les frottements de l'axe sur les paliers pendant la durée de la chute du poids.*

On prendra pour l'accélération de la pesanteur $g = 10$.

SOLUTION.

1° $WH = 2043$ kilogrammètres;

2° $v = \frac{2H}{t} = 0^m,54$ à la seconde

3° $\frac{Wv^2}{2g} = 1,4$ kilogrammètre;

4° $WH - \frac{Wv^2}{2g} = 2042$ kilogrammètres;

5° $N = \frac{120n}{t} = 120t, \qquad N^2 = 14400$;

6° $\mathfrak{M} = \frac{WH - \frac{Wv^2}{2g}}{N^2} = 0,142$ kilogrammètre:

7° $\left(WH - \frac{Wv^2}{2g}\right)\frac{n'}{n} = 766$ kilogrammètres.

(Les démonstrations de ces formules ne comptent pas, elles sont immédiates; la dernière seule est un peu plus délicate.)

(Novembre 1909.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une courbe est représentée par l'équation*

$$ya^2 = x^3 :$$

1° *Par un point* A *de la courbe on mène la tangente, qui coupe la courbe en un autre point* B; *trouver le lieu du point* C, *milieu de* AB.

2° *Soit* A' *le point symétrique de* A *par rapport à l'origine* O. *Trouver l'enveloppe de la droite* CA'.

3° *Déterminer le point* T *où la tangente en* A *coupe l'axe* O*y*, *et calculer l'aire* OAT, *comprise entre l'arc* OA *de la courbe, la tangente* AT, *et la partie* TO *de l'axe des y*.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} - 4y = 4x^2 - 8.$$

(Juillet 1909.)

Composition écrite. — *On donne la parabole*

$$y^2 = 2px.$$

La tangente au point M *coupe les axes aux points* A *et* B.

1° *Trouver la courbe* C, *lieu du point* P *milieu de* AB.

2° *Calculer l'aire comprise entre la droite* MP, *la parabole et la courbe* C.

3° *Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire à la tangente* MP, *menée au point* P, *et construire la courbe obtenue.*

Épreuve pratique. — *Trouver une courbe telle que le rectangle construit avec la sous-normale et un segment constant donné de longueur* $2k$ *ait une aire égale à celle du carré construit sur le rayon vecteur.*

(Novembre 1908.)

Nancy.

ANALYSE.

Première question. — *Intégration de l'équation de Clairaut. Solution générale; solution singulière.*

Deuxième question. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\sin t \frac{d^2 t}{dx^2} = \cos t \left(\frac{dt}{dx}\right)^2;$$

la solution générale se présente sous la forme $x = f(t)$.

2° *Construire la courbe* C *dont les coordonnées rectangulaires sont exprimées en fonction du paramètre* t, *l'une par la relation précédente* $x = f(t)$, *l'autre par* $y = a \sin t$, a *étant une constante positive.*

3° *On prend sur cette courbe* C *deux points* M_1 *et* M_2 *correspondant aux valeurs* t_1 *et* t_2 *de* t : *évaluer l'aire comprise entre l'axe des* x, *la courbe* C *et les ordonnées des points* M_1 *et* M_2.

4° *On considère l'aire illimitée comprise entre la courbe* C *et l'axe des* x : *calculer le volume engendré par cette aire en tournant autour de cet axe.*

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE.

On considère la courbe de l'espace représentée en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = z^2, \qquad y = \frac{2}{3} z^3 :$$

1° *Trouver le lieu des traces des tangentes à cette courbe sur le plan* xOy.

2° *Trouver la loi du mouvement d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur cette courbe sans frottement. L'axe des* z *est vertical; on suppose qu'à l'instant initial le mobile est placé sans vitesse à l'origine des coordonnées.*

(Juin 1908.)

ANALYSE.

I. *Exposer la théorie de l'intégration des équations différentielles du second ordre qui ne contiennent pas explicitement la variable indépendante. Application à l'équation*

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1.$$

II. *On considère une courbe plane* (C) *rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy. *On désigne par* M *un quelconque de ses points, par* P *la projection de* M *sur* Ox, *par* T *l'intersection de la tangente en* M *avec* Oy, *par* N *l'intersection de la normale en* M *avec* Ox. *Déterminer la courbe* (C) *par la condition que l'aire du quadrilatère* OPMT *soit équivalente à celle du triangle* MPN; *examiner les différents cas de figure.*

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE.

Le mouvement d'un point mobile est défini par les équations

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad z = b \cos 2t,$$

a *et* b *étant des constantes données. On demande le lieu de l'extrémité du vecteur accélération et le lieu de sa trace*

sur le plan des xy. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire en un de ses points. (Octobre 1908.)

Rennes.

Épreuve écrite. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} - y\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+a^2}\right) = -\frac{2ax}{x^2+a^2}.$$

Vérifier que l'intégrale particulière de cette équation, qui s'annule pour $x = a$, est la fonction

$$y = \frac{x^2}{a}\left(\frac{a^2-x^2}{x^2+a^2}\right).$$

Construire la courbe (C) *qui représente la variation de cette fonction.*

Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), *l'axe des x et les droites $x = 0$, $x = a$.*

Calculer le rayon de courbure de la courbe (C) *au point $x = 0$.*

Peut-on déterminer la constante k de façon que tous les points d'intersection de la courbe (C) *avec la parabole*

$$y = \frac{x^2}{k}$$

soient réunis à l'origine?

Épreuve pratique. — *D'un point* O *on lance horizontalement, avec la vitesse v_0, un mobile pesant. Déterminer le point* A *où ce mobile viendra tomber sur un plan horizontal situé à une profondeur h plus bas que le point* O. *Calculer la durée de la descente, la vitesse du mobile au moment de la chute, la composante normale de l'accélération au même instant, et la longueur de la trajectoire parcourue.*

Application numérique :

$$v_0 = 10 \text{ m : sec.} \qquad h = 30^{\text{m}}. \qquad g = 9^{\text{m}},81.$$
$$e = 2,7182818.$$

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - a,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt},$$

où a désigne une constante donnée.

2° *Déterminer les constantes arbitraires de façon que, pour $t = 0$, on ait à la fois*

$$x = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 2a,$$

$$y = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 0.$$

3° *Calculer l'arc s de la courbe*

$$x = a(t + \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$

cet arc étant compté à partir du point $t = 0$, et vérifier qu'on a la relation

$$s^2 = 8ay.$$

Déterminer, pour un point variable de la courbe, l'angle de la tangente avec Ox, le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure.

(*Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.*)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire la courbe définie par l'équation en coordonnées rectangulaires*

$$y = -a \log \cos \frac{x}{a}$$

quand x varie de $-\frac{a\pi}{2}$ à $+\frac{a\pi}{2}$.

Calculer, pour un point quelconque de la courbe, l'angle de la tangente avec Ox, le rayon de courbure et la longueur d'arc, comptée à partir de l'origine.

Trouver les valeurs numériques de ces expressions pour

$$a = 1, \qquad x = \frac{\pi}{3},$$

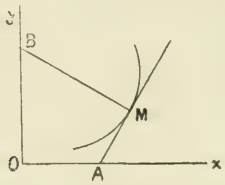
avec quatre décimales exactes.

(*On donne* $e = 2,71828$.) (Juin 1909.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soit* C *une courbe rapportée à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy. *La tangente en un*

Fig. 4.



point M *de la courbe rencontre l'axe des* x *en un point* A. *La normale en* M *rencontre l'axe des* y *en un point* B. *Déterminer la courbe* C *de façon que le rapport* $\frac{OA}{OB}$ *ait une valeur constante* k.

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes ainsi obtenues.

II. S *et* S' *sont deux corps solides. Un élément du corps* S *et un élément du corps* S' *s'attirent proportionnellement à leurs masses* m *et* m' *et à leur distance mutuelle* ρ :

1° *Montrer que les deux corps s'attirent comme si la masse de chacun d'eux était concentrée en son centre de gravité.*

2° *Le corps* S *peut tourner autour d'un axe fixe vertical* Oz *et glisser le long de cet axe. Le corps* S' *peut seulement tourner autour d'un second axe fixe vertical* $G'z'$ *passant par son centre de gravité* G'.

Trouver le mouvement du système.

(On néglige les frottements, et l'on suppose la distance des deux axes assez grande pour que les deux corps ne se heurtent pas.)

A quelle condition les petits mouvements du corps S seront-ils périodiques ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le Tableau suivant donne des couples de valeurs correspondantes pour une variable x et une fonction y de cette variable :*

x.	y.
11	9531
12	18232
13	26236
14	33647
15	40546
16	47000
17	53063
18	58779
19	64185

1° *Calculer la valeur de y qui correspond à $x = 14,384$.*

2° *Supposant que y représente l'intensité d'une force verticale et x la cote de son point d'application, calculer approximativement le travail de cette force quand x varie de 11 à 19.* (Juillet 1908.)

QUESTIONS.

2165. Soit ABCDEF un hexagone inscrit ou circonscrit à une conique. Soient L, M, N les points de rencontre respectifs des couples de côtés CD, FA ; BC, EF ; AB, DE. Démontrer la relation

$$\frac{AL.DL}{FL.CL}\,\frac{BN.EN}{AN.DN}\,\frac{CM.FM}{BM.EM} = 1.$$

(KLUG.)

2166. La polaire d'un point M d'une ellipse par rapport à son cercle de Monge passe par le symétrique du centre de courbure de M par rapport à M. (E.-N. Barisien.)

2167. Soient dans un plan cinq droites concourantes en un point O et sur chacune d'elles deux points $(A_1 A_2)$, $(B_1 B_2)$, $(C_1 C_2)$, $(D_1 D_2)$, $(E_1 E_2)$. On désigne par C_a la cubique passant par O et les points $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$, et par C_b, C_c, C_d, C_e, les cubiques analogues. La tangente en O à C_a coupe cette courbe au point a; soient b, c, d, e, les points analogues des cubiques C_b, C_c, C_d, C_e.

Montrer que :

1° Les cinq cubiques considérées ont, en dehors de O, deux points communs P et Q,

2° Les points a, b, c, d, e sont situés sur la droite PQ.

(Letierce.)

2168. m et p étant deux entiers quelconques et C_m^p désignant le nombre de combinaisons de m lettres p à p, on a :

1°

$$\frac{1}{m+p} - \frac{C_m^1}{m+p-1} + \frac{C_m^2}{m+p-2} + \ldots + (-1)^m \frac{C_m^m}{p} = (-1)^m \frac{1}{p} \frac{1}{C_{m+p}^p};$$

2° si $m = p$,

$$\frac{1}{p} - \frac{C_m^1}{p-1} + \frac{C_m^2}{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{C_m^{p-1}}{1}$$
$$= (-1)^{p-1} \left(\frac{1}{m-p+1} - \frac{1}{m-p+2} + \ldots + \frac{1}{m} \right) C_m^p.$$

(Letierce.)

[M²7b]

SURFACES PARTIELLEMENT CYLINDROIDES (¹);

PAR M. E. KERAVAL,
Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Surfaces à plan directeur.

Il s'est glissé une erreur dans l'équation de ces surfaces qu'on obtient en éliminant t entre

$$y = tx - kt^2$$

et

$$z = \frac{at^3 + bt^2 + ct}{1 + t^2},$$

et non pas

$$z = \frac{at^3 + bt^2 + c}{1 + t^2}.$$

Les points de Cayley forment un cylindre de résolution sur lequel est tracée la courbe nodale de la surface ; cette courbe est une cubique gauche. En étudiant la question qui est facile, j'ai été conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un plan* P *on considère deux paraboles de foyers* F, F', *de directrices* Δ, Δ'. *Elles ont à distance finie trois tangentes communes qui forment un triangle* ABC. *Le cercle circonscrit de ce triangle reste fixe lorsqu'on déplace chacune des directrices parallèlement à elle-même, sans toucher aux foyers.*

(¹) *Voir* l'article du même titre (*Nouvelles Annales*, 4ᵉ série, t. X, 1910, p. 49).

Il est facile de voir ce que devient le théorème si Δ est parallèle à Δ'.

Je reprends maintenant la suite de mon article précédent.

Étude des surfaces S_6.

Elles proviennent de la décomposition des S_9 en un cylindroïde et une surface du sixième degré. La catégorie la plus intéressante de ces surfaces me sera fournie par l'étude d'une congruence que je vais commencer par définir et qui est liée d'une façon étroite à la famille de Lamé trouvée par M. G. Humbert (*Systèmes orthogonaux*, par G. Darboux, p. 100, 101, ...).

Définition d'une congruence h, k, l.

J'appelle ainsi une congruence définie par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= hYZ, \\ \rho' &= kZX, \\ \rho'' &= lXY; \end{aligned}\right.$$

h, k, l sont trois nombres choisis arbitrairement pourvu que

$$h + k + l = 0.$$

Je rappelle les notations que j'ai adoptées. Si X, Y, Z, L, M, N sont les six coordonnées de la droite, j'ai posé

$$\begin{aligned} \rho &= NY - MZ, \\ \rho' &= LZ - NX, \\ \rho'' &= MX - LY. \end{aligned}$$

Les égalités (1) me donnent bien comme cela doit être

$$\rho X + \rho' Y + \rho'' Z = 0.$$

Je commence par chercher les points de Cayley de cette congruence, c'est-à-dire un point xyz tel que si de ce point j'abaisse des perpendiculaires sur les droites de la congruence les pieds soient dans un plan

$$Px + Qy + Rz + S = 0.$$

En appliquant le procédé que j'ai déjà indiqué, on trouve, pour déterminer le point de Cayley xyz et le plan correspondant, les six équations

$$\begin{aligned} S + Px &= 0, \\ S + Qy &= 0, \\ S + Rz &= 0, \\ hP + Qz - Ry &= 0, \\ kQ - Rx + Pz &= 0, \\ lR + Py - Qx &= 0. \end{aligned}$$

Finalement on trouve dix points de Cayley : les quatre sommets A, B, C, D d'un tétraèdre et les milieux des six arêtes. Les arêtes opposées de ce tétraèdre sont égales; les perpendiculaires communes à deux arêtes opposées passent par les milieux de ces arêtes, ce sont les axes de coordonnées. Si, pour fixer les idées, on suppose $h > 0, k < 0, l < 0$, ces quatre points A, B, C, D ont pour coordonnées

$$\begin{array}{lccc} (A) & \sqrt{kl}, & i\sqrt{-hl}, & -i\sqrt{-hk}, \\ (B) & \sqrt{kl}, & -i\sqrt{-hl}, & -i\sqrt{-hk}, \\ (C) & \sqrt{kl}, & i\sqrt{-hl}, & i\sqrt{-hk}, \\ (D) & -\sqrt{kl}, & -i\sqrt{-hl}, & -i\sqrt{-hk}; \end{array}$$

les droites AB, CD sont réelles, les autres arêtes sont imaginaires.

Comme points de Cayley réels, nous trouvons :

Le point

$$(E) \qquad x = +\sqrt{kl}, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$(P_E) \qquad \frac{z}{y} = -\sqrt{\frac{l}{k}},$$

et le point

$$(F) \qquad x = -\sqrt{kl}, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$(P_F) \qquad \frac{z}{y} = -\sqrt{\frac{l}{k}}.$$

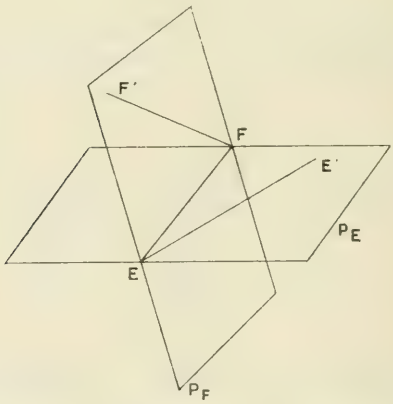
Ces éléments réels vont me permettre de donner une définition géométrique très simple d'une congruence hkl.

Première définition géométrique d'une congruence hkl et de sa conjuguée.

On considère deux plans sécants P_E, P_F et sur leur intersection deux points E, F.

Autour de E dans P_E on fait tourner EE'.

Fig. 1.



Autour de F dans P_F on fait tourner FF', la perpen-

diculaire commune à ces deux droites décrit la congruence.

Pour avoir ce que j'appellerai la *congruence conjuguée*, on associera E avec P_F et F avec P_E.

Nous allons retrouver cette congruence *hkl* d'une tout autre façon.

Famille de Lamé de M. G. Humbert.

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1890.)

En cherchant les surfaces réglées qui possèdent des points de Cayley formant une ligne droite, j'ai trouvé que ces points formaient six droites pour chaque système des génératrices dans le cas des hyperboloïdes. J'ai alors cherché l'équation générale des hyperboloïdes ayant les mêmes droites de Cayley et j'ai trouvé l'équation suivante où u désigne un paramètre variable :

$$\frac{x^2}{(u+\beta)(u+\gamma)} + \frac{y^2}{(u+\gamma)(u+\alpha)} + \frac{z^2}{(u+\alpha)(u+\beta)} + 1 = 0.$$

C'est bien la famille de Lamé de M. G. Humbert. Si l'on suppose

$$\gamma < \alpha < \beta,$$

α, β, γ étant positifs, on a un hyperboloïde u variant de $-\beta$ à $-\gamma$. Les droites de Cayley RÉELLES sont pour l'un des systèmes de génératrices

$$x = +\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)},$$

$$\frac{y}{z} = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma}}$$

et

$$x = -\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)},$$

$$\frac{y}{z} = +\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma}},$$

qui naturellement ne changent pas si l'on change α, β, γ en $\alpha+\lambda, \beta-\lambda, \gamma+\lambda$.

Il y a en tout six droites de Cayley qui forment les six arêtes d'un tétraèdre ABCD analogue à celui dont j'ai parlé plus haut. On peut définir ces six droites de la façon suivante :

Ce sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes ou encore les perpendiculaires aux plans cycliques menées par les foyers du contour apparent de la surface sur les plans cycliques centraux. Les quatre sommets ABCD jouent un rôle spécial : si par l'un d'eux on mène des perpendiculaires aux génératrices, les pieds sont en ligne droite pour chaque hyperboloïde. Pour tout autre point d'une droite de Cayley, les pieds sont sur un cercle de la quadrique.

Deuxième définition de la congruence *hkl*.

J'appelle H_u les hyperboloïdes d'Humbert

$$\frac{x^2}{(u-\beta)(u+\gamma)}-\frac{y^2}{(u+\gamma)(u-\alpha)}-\frac{z^2}{(u+\alpha)(u-\beta)}-1=0.$$

D'après ce qui précède j'aurai évidemment une congruence *hkl* en envisageant les génératrices d'un même système de tous ces hyperboloïdes. C'est ce que je vais vérifier directement. Je pose pour abréger

$$(u+\beta)(u+\gamma)=A,\quad (u+\gamma)(u+\alpha)=B,\quad (u+\alpha)(u+\beta)=C.$$

Pour que la droite $x=az+p$, $y=bz+q$ soit sur la surface, il faut trois conditions qui, résolues en A, B, C, donnent

$$A=\frac{p(aq-bp)}{b},\qquad B=\frac{q(aq-bp)}{-a},\qquad C=-\frac{pq}{ab};$$

d'où

$$(u - \alpha)^2 = \frac{q^2}{a^2}.$$

Si, par exemple, on adopte

$$u - \alpha = -\frac{q}{a},$$

on trouve

$$\beta - \alpha = \frac{ap - bq}{ab},$$

$$\gamma - \beta = aq - bp = \frac{p}{b},$$

$$\alpha - \gamma = bp - aq = \frac{q}{a};$$

d'où

$$\rho = (\beta - \gamma)b,$$
$$\rho' = (\gamma - \alpha)a,$$
$$\rho'' = (\alpha - \beta)ab.$$

ou, avec d'autres notations,

$$\rho = (\beta - \gamma)YZ,$$
$$\rho' = (\gamma - \alpha)ZX,$$
$$\rho'' = (\alpha - \beta)XY.$$

Donc il suffit de poser

$$h = \beta - \gamma, \qquad k = \gamma - \alpha, \qquad l = \alpha - \beta;$$

on a du reste

$$h + k + l = 0.$$

La congruence conjuguée $(-h, -k, -l)$ est formée des génératrices de l'autre système.

J'aurai encore à utiliser une autre définition de la congruence hkl. Pour cela j'énoncerai le théorème suivant, bien facile à vérifier :

Théorème. — *On considère un hyperboloïde réglé* H *et une génératrice fixe* G *de* H. *Soient* G' *une géné-*

ratrice mobile du même système et AB *la perpendiculaire commune à* GG′:

1° AB décrit un cylindroïde d'axe G dont l'une des génératrices est la perpendiculaire à G menée par le point central dans le plan central;

2° Ce cylindroïde coupe H suivant une conique qui se projette suivant un cercle sur un plan perpendiculaire à G. Cette ellipse est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur les génératrices du cylindroïde de tous les points de la génératrice G_1 parallèle à G.

Considérons maintenant une des surfaces H_u et sur elle une génératrice G′ du deuxième système, elle coupe sa sphère de Monge en deux points M et N par lesquels il passe une génératrice du premier système. Donc G′ est la perpendiculaire commune à deux génératrices de ce premier système. D'où....

Troisième définition d'une congruence *hkl*.

On considère un hyperboloïde H et les génératrices de l'un des systèmes; les perpendiculaires communes à ces génératrices prises deux à deux forment une congruence *hkl* qui reste la même si l'on remplace H par un quelconque des hyperboloïdes ayant les mêmes droites de Cayley.

Ordre et classe de la congruence hkl. — Si l'on se reporte à la première définition au moyen des deux complexes EP_E, FP_F, on voit qu'il faut laisser de côté les droites qui coupent EF orthogonalement.

Ceci admis, il est facile de vérifier que l'ordre est 3

et la classe 2. Cette congruence jouit de la propriété remarquable suivante :

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ.

Théorème. — *Toute surface équatoriale d'une congruence hkl (c'est-à-dire l'ensemble des droites de la congruence parallèles à un plan donné) est un cylindroïde.*

En cherchant les conditions pour que la droite $x = az + p$, $y = bz + q$ soit sur H_u, nous avons trouvé des relations qu'on peut écrire

$$p = b(u + \beta),$$
$$q = -a(u + \alpha),$$
$$aq - bp = u - \gamma;$$

d'où

$$u = -\frac{a^2\alpha + b^2\beta - \gamma}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Si donc on se donne a, b, c'est-à-dire la direction de la droite u, par suite H_u est déterminé et les relations précédentes donnent p, q.

Si l'on veut les droites de la congruence parallèles à un plan P, on cherche la droite Δ appartenant à la congruence, qui est perpendiculaire à P et conjuguée sur le H_u dont elle fait partie, on prend les perpendiculaires communes à Δ et aux génératrices du même système, on a le cylindroïde de l'énoncé.

SECONDE PROPRIÉTÉ.

Théorème. — *Par un point* M *de l'espace passent trois droites* G_1, G_2, G_3 *de la première congruence et trois droites* G'_1, G'_2, G'_3 *de la congruence conjuguée :*

1° Les deux trièdres $G_1 G_2 G_3$ et $G'_1 G'_2 G'_3$ sont supplémentaires ;

2° Les plans $G_1 G'_1$, $G_2 G'_2$, $G_3 G'_3$ passent par une même droite ; donc

3° Par l'intersection de deux surfaces H_u, il en passe une troisième.

La première partie résulte de la considération du cylindroïde formé par les perpendiculaires communes à G_1 et aux génératrices de même système sur une H_u, les deux autres résultant de la première ; du reste la troisième est facile à vérifier directement.

Surface focale d'une congruence *hkl*. Surface médiane. — Surface centrale.

La surface focale s'obtient en cherchant l'enveloppe de H_u lorsque u varie. On est amené à éliminer u entre les deux équations

$$x^2 + y^2 - z^2 + \mu = -3u^2 - 6\lambda u,$$
$$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 + \nu = -2u^3 - 3\lambda u^2;$$

on a posé pour abréger

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\lambda, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \mu, \qquad \alpha\beta\gamma = \nu.$$

Or la première équation est la sphère de Monge de H_u : donc les points focaux d'une droite de la congruence sont les points où cette droite coupe le H_u dont elle fait partie. Il en résulte que ces deux foyers F et F′ sont équidistants de l'origine. Donc :

1° La surface médiane (notations Guichard ; *voir*, par exemple, *Comptes rendus*, 1891, p. 1425 et suiv.), c'est-à-dire le lieu du milieu de FF′, coïncide avec le

lieu du pied K de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite : c'est une surface de Steiner ;

2° La surface centrale, c'est-à-dire l'enveloppe du plan mené par k perpendiculairement à la droite, est réduite au point O.

La surface focale a pour équation

$$4(x^2+y^2+z^2+\mu-3\lambda^2)^2$$
$$+27[\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2-\lambda(x^2+y^2+z^2+\mu)+2\lambda^3+\nu]=0.$$

Cette surface est fort intéressante. Je me contenterai d'indiquer l'une de ses propriétés :

Théorème. — *La surface focale d'une congruence hkl possède six cercles de contact* (c'est-à-dire tout le long desquels le plan du cercle est tangent à la surface; la surface des ondes a par exemple quatre cercles de contact).

Les équations écrites plus haut prouvent que la surface focale est le lieu d'une conique sphérique. La considération des plans cycliques du cône

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=0$$

m'amène à mettre les équations précédentes sous trois formes. Chacune de ces formes me donne deux cercles de contact. Si comme plus haut je suppose $\gamma<\alpha<\beta$ et $\alpha, \beta, \gamma>0$ la forme qui donne les cercles réels est la suivante :

$$x^2+y^2+z^2+\mu=-3u^2-6\lambda u,$$
$$(\beta-\alpha)y^2+(\gamma-\alpha)z^2=(u+\alpha)^2(2u+\beta+\gamma).$$

Pour $u=-\alpha$ on a deux cercles réels perpendiculaires aux droites de Cayley de H_u. Le plan d'un de ces cercles coupe la surface suivant ce cercle compté deux fois, plus un autre cercle.

Surfaces de Steiner.

Ces surfaces du quatrième degré étudiées par Weierstrass, Cayley, Cremona, etc. (voir *Journal de Crelle*, t. 63-64 par exemple) possèdent trois droites doubles concourantes et quatre coniques *de contact* situées sur une même quadrique. Il en résulte que tout plan tangent coupe la surface suivant deux coniques. Toutes ces propriétés se déduisent bien facilement de l'étude d'une congruence hkl. Soit M un point quelconque de coordonnées α, β, γ. Si de ce point on abaisse une perpendiculaire sur les droites de la congruence

$$\rho = hYZ,$$
$$\rho' = kZX,$$
$$\rho'' = lXY,$$

les coordonnées x, y, z du pied sont données par les formules

$$x = \frac{hYZ + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y = \frac{kZX + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z = \frac{lXY + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

qui définissent une surface de Steiner en coordonnées $u = \frac{X}{Z}$, $v = \frac{Y}{Z}$ par exemple.

Les droites de la congruence peuvent être groupées en cylindroïdes et les axes de ces cylindroïdes forment la congruence conjuguée : il y a trois de ces axes qui passent par M : ce sont évidemment les trois droites doubles de la surface de Steiner. D'où la propriété des plans tangents. Du reste les ellipses tracées sur la surface s'obtiennent au moyen des cylindroïdes.

Pour la dernière propriété je supposerai α, β, γ nuls, mais il est bien facile de généraliser. La surface de Steiner est alors

$$x = \frac{hYZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y = \frac{kZX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z = \frac{lXY}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Coupons cette surface par le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Il faudra prendre les droites de la congruence parallèles aux génératrices du cône

$$AhYZ + BkZX + ClXY + D(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Si le plan se déplace parallèlement à lui-même, c'est-à-dire si A, B, C restant fixes on fait varier D, le cône se décomposera trois fois en deux plans, les droites correspondantes donneront deux cylindroïdes, donc les plans correspondants donneront deux ellipses : ainsi trois plans tangents parallèles à un plan donné. Mais si le cône est de révolution, dans le cas limite les deux ellipses seront confondues et l'on aura une ellipse *de contact*. Il s'agit donc de chercher les cônes de révolution de la forme

$$AhYZ + BkZX + ClXY = 0,$$

c'est-à-dire passant par les trois axes de coordonnées. Or, par trois droites formant un trièdre, on peut faire passer quatre cônes de révolution : on a donc bien quatre ellipses de contact.

Transformation birationnelle faisant correspondre une sphère et une surface de Steiner.

Les considérations qui précèdent m'ont conduit à des transformations birationnelles faisant correspondre

une sphère et une surface de Steiner. Exemple :

$$x' = \frac{y}{k}, \qquad x = hy',$$

$$y' = \frac{x}{h}, \qquad y = kx',$$

$$z' = \frac{lxy}{hkz}, \qquad z = \frac{lx'y'}{z'}.$$

Si le point (x', y', z') décrit la sphère

$$(\Sigma) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2z' = 0,$$

le point, x, y, z, décrit la surface de Steiner

$$(S) \qquad hy^2z^2 + kz^2x^2 + lz^2y^2 - 2hklxyz = 0.$$

Il existe quatre cônes de révolution contenant Ox, Oy, Oz. Pour obtenir les plans des coniques de contact il faut envisager l'intersection de Σ par un de ces quatre cônes.

A une section plane de S correspond sur Σ l'intersection d'un cône ayant son sommet à l'origine et de Σ. Si le plan est tangent à S, ce cône se décompose. Etc.

Surfaces S_6 qui correspondent à une congruence hkl.

Ayant choisi les nombres h, k, l tels que $h + k + l = 0$, on aura une surface S_6 en envisageant les droites de cette congruence qui sont parallèles aux génératrices d'un cône du deuxième degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = 0.$$

Si l'on cherche les points de Cayley de la surface, on trouve une sextique, intersection de deux surfaces du troisième degré. Cette intersection se décompose en une cubique qui ne convient pas et la sextique. J'ajoute

que cette sextique ne change pas si l'on remplace le cône par un cône homocyclique.

Pour simplifier un peu l'écriture je m'en tiendrai au cas d'un cône de la forme

$$(C) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Les équations de la surface S_6 sont alors

$$x = az + \frac{b(h - a^2 l)}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$y = bz + \frac{a(k - b^2 l)}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$Aa^2 + Bb^2 + C = 0;$$

c'est-à-dire qu'on aura l'équation de cette surface en éliminant a, b.

Soient (x, y, z) un point de Cayley et

$$Px + Qy + Rz + S = 0$$

le plan correspondant. On doit avoir

$$PhYZ + QkZX + RlXY + S(X^2 + Y^2 - Z^2)$$
$$+ (xX + yY + zZ)(PX + QY + RZ) = \lambda(AX^2 + BY^2 + CZ^2),$$

ce qui donne

$$S + Px = \lambda A, \qquad Ph + Ry + Qz = 0,$$
$$S + Qy = \lambda B, \qquad Qk + Pz + Rx = 0,$$
$$S + Rz = \lambda C, \qquad Rl + Qx + Py = 0.$$

Donc dans l'abaque

$$\begin{vmatrix} h & z & y & (B - C)x \\ z & k & x & (C - A)y \\ y & x & l & (A - B)z \end{vmatrix}.$$

il faut annuler deux déterminants à trois colonnes, par

exemple

$$(S) \qquad \begin{vmatrix} h & z & y \\ z & k & x \\ y & x & l \end{vmatrix} = 0,$$

$$(S') \qquad \begin{vmatrix} h & z & y \\ z & k & x \\ (B-C)x & (C-A)y & (A-B)z \end{vmatrix} = 0.$$

Si je prends $h > 0$, $k < 0$, $l < 0$, ces deux surfaces ont trois droites communes qui ne comptent pas: la droite de l'infini du plan $z = 0$ et

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon i\sqrt{-hk} \\ \frac{y}{x} &= -\varepsilon i\sqrt{-\frac{h}{k}} \end{aligned} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Reste la sextique annoncée qui admet Ox, Oy, Oz comme axes de symétrie. Nous verrons plus loin qu'elle a six directions asymptotiques qui sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône (C).

Courbe nodale de S_6. — Si l'on prend un point A sur la sextique et que de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices de S_6, les pieds sont dans un plan P_A qui coupe S_6 suivant une courbe du quatrième degré tracée sur la surface de Steiner qui correspond à A et en outre suivant deux droites : le point de rencontre de ces deux droites décrit la courbe nodale que j'ai pu déterminer dans certains cas particuliers; je donnerai des exemples où elle se compose de trois coniques.

Conditions de décomposition de la sextique.

Il faut s'assurer qu'en général cette sextique ne se décompose pas; il est facile de trouver tous les cas de

décomposition. Je reprends les six équations en x, y, z, P, Q, R, S. Les trois dernières me donnent les équations de la surface (S) en coordonnées $u = \frac{P}{R}$, $v = \frac{Q}{R}$

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{P(hP^2 - kQ^2 - lR^2)}{2PQR}, \\ y = \dfrac{Q(kQ^2 - hP^2 - lR^2)}{2PQR}, \\ z = \dfrac{R(lR^2 - hP^2 - kQ^2)}{2PQR}. \end{cases}$$

En portant dans l'équation

$$P(B - C)x + Q(C - A)y + R(A - B)z = 0,$$

on trouve la condition

$$(2)\quad \begin{aligned} &(B - C)P^2(hP^2 - kQ^2 - lR^2) \\ &+ (C - A)Q^2(kQ^2 - lR^2 - hP^2) \\ &+ (A - B)R^2(lR^2 - hP^2 - kQ^2) = 0. \end{aligned}$$

Si le point (P, Q, R) décrit la quartique (2) le point (x, y, z) donné par (1) décrit la sextique tracée sur (S). Pour que la sextique se décompose, il faut et il suffit que (2) se décompose.

Or on a un polynome bicarré en P; l'étude est donc facile et l'on trouve :

Premier cas de décomposition. — La sextique se décompose en une quartique et une conique si l'une des conditions suivantes est remplie :

$$l(B - C) + h(A - B) = 0,$$
$$h(C - A) + k(B - C) = 0,$$
$$k(A - B) + l(C - A) = 0.$$

Exemple numérique :

$$h = 2, \qquad k = 1, \qquad l = -3.$$

Pour

$$h(C - A) + k(B - C) = 0,$$

on trouve la conique

$$z = 0, \qquad 2x^2 + y^2 + 6 = 0,$$

qui est imaginaire et la quartique

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 + \quad z^2 - 2 &= 0, \\ xyz + y^2 - 4x^2 \qquad &= 0, \end{aligned}$$

qui ont deux droites communes

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon x\sqrt{2} \\ z &= \varepsilon\sqrt{2} \end{aligned} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Je laisse de côté le cas où deux des nombres h, k, l sont égaux; dans ce cas on peut avoir trois coniques : un cercle et deux paraboles.

Deuxième cas de décomposition. — Ce cas correspond à la condition

$$Ah + Bk + Cl = 0,$$

ou bien

$$\frac{h}{C - B} = \frac{k}{A - C} = \frac{l}{B - A},$$

c'est-à-dire que le cône (C) doit avoir pour plans cycliques

$$\frac{x^2}{h} = \frac{y^2}{k}, \qquad \frac{y^2}{k} = \frac{z^2}{l}, \qquad \frac{z^2}{l} = \frac{x^2}{h}.$$

Dans ce cas-là la surface peut s'écrire

$$x = az - \frac{Bh}{B - C}b,$$

$$y = bz - \frac{Ah}{B - C}a,$$

$$Aa^2 + Bb^2 + C = 0.$$

En éliminant ab, on trouve

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \frac{ABC}{(B-C)^2} h^2 = 0,$$

et la sextique se décompose en six droites. La surface (S)

$$(S) \qquad 2xyz - (hx^2 + ky^2 + lz^2) + hkl = 0$$

possède six droites à distance finie : deux parallèles à chacun des plans de coordonnées. Par exemple

$$z^2 = hk,$$
$$hx = yz,$$

ou

$$z = \varepsilon\sqrt{hk}$$
$$\frac{y}{x} = \frac{h}{z} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ces six droites appartiennent à S'.

Si l'on considère l'hyperboloïde habituel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

avec $a > b$, les six droites de Cayley forment un tétraèdre comme celui dont j'ai parlé tout au début. Deux arêtes opposées sont réelles et ont pour équations

$$x = \varepsilon \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{a}$$
$$\frac{y}{x} = \frac{-acx}{b(a^2-c^2)} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Les plans de Cayley correspondants sont les plans cycliques. Ces six droites de Cayley sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes.

Soit Δ une de ces droites ; elle est perpendiculaire à un plan cyclique. Si par un point A de Δ on abaisse

des perpendiculaires sur les génératrices du système considéré, les pieds sont sur un cercle de la quadrique dont le plan n'est pas parallèle au premier plan cyclique considéré.

Cas particulier des hyperboloïdes rectangles. — Il peut arriver que les droites de Cayley soient des génératrices de l'hyperboloïde.

Ceci se produit pour les hyperboloïdes que j'appellerai *rectangles* et qui sont engendrés par la droite d'intersection de deux plans rectangulaires tournant respectivement autour de deux droites Δ, Δ'. Ces droites Δ, Δ' sont précisément des droites de Cayley : ici la propriété devient évidente. Pour que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ soit rectangle si $a>b$, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Directions asymptotiques des sextiques de Cayley.

Lemme. — *Soit* O *le point de l'axe du cylindroïde où se croisent deux génératrices rectangulaires qui forment avec l'axe un trièdre trirectangle. Si un point* M *s'éloigne à l'infini sur une droite* λ, P_M *devient* P *perpendiculaire à l'axe. Pour obtenir ce plan on mène par l'axe le plan parallèle à* λ, *il coupe le cylindroïde suivant une génératrice qui coupe l'axe en un point* A. P *passe par* B *symétrique de* A *par rapport à* O.

Je ne donne pas la démonstration, qui est immédiate.

Théorème. — *Les directions asymptotiques d'une sextique de Cayley correspondant à une* S_6 *d'une*

congruence hkl sont les six perpendiculaires aux plans cycliques du cône choisi. La sextique ne change pas si l'on remplace le cône par un cône homocyclique; on peut donc le prendre évanouissant, mais alors le S_6 se décompose en deux cylindroïdes ayant une génératrice commune, la perpendiculaire commune à leurs axes.

Soient μ, μ' les axes de ces deux cylindroïdes; O, le point dont j'ai parlé plus haut situé sur l'axe du premier : CD la perpendiculaire commune à μ et à μ'. Le plan P perpendiculaire à μ et passant par CD est tangent au deuxième cylindroïde. Il existe donc une droite Δ parallèle à μ' et telle que, pour tout point A de Δ, P_A soit confondu avec P.

Si A va à l'infini sur Δ, P_A ne change pas dans le premier cylindroïde et tend vers P dans le deuxième. Donc....

Surfaces réglées réciproques.

Soient S une surface réglée, Δ une génératrice, Δ' la perpendiculaire à Δ menée dans le plan tangent au point central O et passant par ce point. Δ' décrit une deuxième surface que j'appelle *réciproque* de la première. Je vais faire voir que le point O décrit la ligne de striction commune aux deux surfaces qui sont tangentes tout le long de cette ligne de striction. Adoptons la méthode dont M. Darboux s'est servi si souvent dans sa théorie des surfaces et soit $Oxyz$ le trièdre mobile $Oz \equiv \Delta$, $Ox \equiv \Delta'$. Les projections de la vitesse d'un point (lié au trièdre) sur les axes mobiles sont avec les notations habituelles :

$$V_x = \xi + qz - ry,$$
$$V_y = \eta + rx - pz,$$
$$V_z = \zeta + py - qx.$$

Pour un point de Oz

$$V_x = \xi - qz,$$
$$V_y = \eta - pz,$$
$$V_z = \zeta.$$

On en déduit l'équation du plan tangent à S en un point de Oz et en écrivant que O est le point central et zOx le plan central, on trouve

$$q = 0, \qquad \eta = 0,$$

et réciproquement.

On en déduit que deux droites rectangulaires quelconques se croisant en O dans le plan zOx décrivent deux surfaces réglées réciproques.

Surfaces réglées réciproques des quadriques.

Soit S une quadrique sur laquelle on n'envisage qu'un système de génératrices. Soit S′ sa réciproque. Je dis que c'est une des surfaces S_6 définies plus haut. En effet, considérons la congruence hkl formée par les perpendiculaires communes aux génératrices considérées de S : les génératrices de S′ en font partie. En outre, elles sont parallèles aux génératrices du cône réciproque du cône asymptote de S. Ceci démontre la proposition.

Autres surfaces S_6.

Elles proviennent de la décomposition des S_9 et il est facile de voir qu'on les obtient en posant

$$\rho = \varphi(X, Y, Z),$$
$$\rho' = \varphi'(X, Y, Z),$$
$$\rho'' = \varphi''(X, Y, Z);$$

$\varphi, \varphi', \varphi''$ étant trois fonctions homogènes et du deuxième degré telles que, ou bien

$$X\varphi + Y\varphi' + Z\varphi'' \equiv 0,$$

on obtient alors les surfaces étudiées plus haut; ou bien

$$X\varphi + Y\varphi' + Z\varphi'' \equiv P\Phi,$$

P étant linéaire et Φ du deuxième degré. Il faut alors prendre

$$\Phi(X, Y, Z) = 0$$

pour cône directeur de la surface.

Pour ne pas trop allonger cet article, je me contenterai d'indiquer deux exemples numériques qui conduisent à des cas de décomposition intéressants.

Premier exemple. — La considération des trois complexes AP_A, BP_B, CP_C, où

$$\begin{array}{lll} P_A : x = 0, & P_B : y = 0, & P_C : z = 0; \\ A\ : 0, 0, 2, & B\ : 0, 0, -1, & C\ : 0, 0, 1, \end{array}$$

conduit à la surface

$$x = az - \frac{a}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$y = bz + \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$b^2 = 2a^2 + 1.$$

La sextique de Cayley se décompose en trois coniques dont les directions asymptotiques sont bien perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur. Ces trois coniques sont :

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & x = 0, & y^2 + 3z^2 = 3; \\ 2^\circ & y = 0, & 9x^2 + 3\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}; \\ 3^\circ & z = \frac{1}{2}, & 8x^2 - 4y^2 + 9 = 0. \end{array}$$

Cette surface possède une courbe nodale formée des trois coniques :

1° $x = 0, \qquad y^2 + 3z^2 = 6z;$

2° $y = 0, \qquad 2x^2 + 3z(z - 1) = 0;$

3° $z = \frac{1}{2}, \qquad 8x^2 - 4y^2 + 9 = 0.$

Cette dernière est triple et coïncide avec une des coniques de Cayley.

Deuxième exemple. — Avec les trois complexes

$$\rho = X^2 + Y^2,$$
$$\rho' = 4X^2,$$
$$\rho'' = XZ.$$

La surface correspondante

$$x = az - \frac{b}{4a},$$
$$y = bz + \frac{b - 4a}{4b},$$
$$a^2 + b^2 + 1 + 4ab = 0.$$

La sextique se décompose en

$$z = 0, \qquad (x + 1)y = 4,$$

et la biquadratique

$$y^2 + z^2 + x + 1 = 0,$$
$$x(x + 1) = y(y - 4),$$

qui est unicursale. On trouve une hyperbole nodale qui a pour équations

$$z = 0, \qquad 4xy = x + 1.$$

Les trois espèces de droites de Cayley.

Je me contenterai d'énoncer les résultats suivants, faciles à vérifier. Une surface réglée peut posséder une droite de Cayley; dans ce cas son cône directeur est du deuxième degré et la droite est perpendiculaire à l'un des plans cycliques de ce cône. Ces droites Δ sont de trois espèces :

Première espèce. — Si A décrit Δ, P_A roule sur une surface de troisième classe, parabolique.

Deuxième espèce. — P_A enveloppe un cylindre parabolique.

Troisième espèce. — P_A reste parallèle à lui-même.

Comme exercice, j'indiquerai le suivant : Démontrer que les surfaces qui possèdent deux droites de Cayley de troisième espèce sont du quatrième degré avec cône directeur du deuxième et que la courbe nodale est une cubique gauche que les génératrices coupent deux fois.

Détermination des courbes gauches qui possèdent une infinité de podaires planes.

J'envisage maintenant les surfaces développables. Chaque point de Cayley donne une podaire plane de l'arête de rebroussement de la surface. Pour avoir une infinité de points de Cayley il faut envisager deux complexes MP_M et $M'P_{M'}$, où $P_M P_{M'}$ soient parallèles. On a le théorème suivant :

Théorème. — *Si une surface possède deux points*

de Cayley M′, M *dont les plans* $P_{M'}$, P_M *soient parallèles, alors :*

1° *Le cône est du deuxième degré;*

2° *Tous les points de la droite* MM′ *sont des points de Cayley, les plans correspondants sont parallèles entre eux et correspondent homographiquement aux points.*

Il n'y a qu'un point double à distance finie, c'est-à-dire un seul point F se trouve dans le plan P_F correspondant : je l'appellerai POINT SPÉCIAL DE CAYLEY;

3° *Les plans cycliques du cône sont : l'un, parallèle à* P_F; *l'autre, perpendiculaire à la droite de Cayley.*

En effet, soient

$$M : \alpha\beta\gamma, \qquad P_M : Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$M' : \alpha'\beta'\gamma', \qquad P_{M'} : Ax + By + Cz + D' = 0;$$

les deux complexes s'écrivent :

$$\begin{aligned} &A\rho + B\rho' + C\rho'' + D(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &\quad + (AX + BY + CZ)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0, \\ &A\rho + B\rho' + C\rho'' + D'(X^2 + Y^2 + Z^2) \\ &\quad + (AX + BY + CZ)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit le complexe

$$N : \frac{\alpha + \lambda\alpha'}{1 + \lambda}, \quad \frac{\beta + \lambda\beta'}{1 + \lambda}, \quad \frac{\gamma + \lambda\gamma'}{1 + \lambda},$$
$$P_N : Ax + By + Cz + \frac{D + \lambda D'}{1 + \lambda} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les droites communes à tous ces complexes forment donc une congruence dont la surface focale se décom-

pose en une conique à l'x et une surface que je vais chercher.

Théorème. — *Toutes les droites de la congruence* $MP_M MP_{M'}$, *où* P_M, $P_{M'}$ *sont parallèles, sont tangentes à un cône du deuxième degré ayant pour sommet le point* spécial F *de* MM'; *ses focales sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur, il est bitangent à ce cône le long des génératrices principales.*

Soit

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q$$

la droite qui décrit la congruence.

Je suppose que a, b soient les deux variables, p et q étant des fonctions de a et b. Je vais déterminer la fonction λ de façon que le plan

$$az + p - x + \lambda(bz + q - y) = 0$$

soit focal, c'est-à-dire ait son point caractéristique sur la droite. Ce point caractéristique est défini par

$$az + p - x + \lambda(bz + q - y) = 0,$$
$$z + \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \lambda}{\partial a}(bz + q - y) + \lambda\frac{\partial q}{\partial a} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial \lambda}{\partial b}(bz + q - y) + \lambda\left(z + \frac{\partial q}{\partial b}\right) = 0.$$

J'écris qu'il est sur la droite

$$z + \frac{\partial p}{\partial a} + \lambda\frac{\partial q}{\partial a} = 0.$$
$$\lambda z + \frac{\partial p}{\partial b} + \lambda\frac{\partial q}{\partial a} = 0.$$

J'élimine z et j'ai

$$\lambda^2\frac{\partial q}{\partial a} + \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial a} - \frac{\partial q}{\partial b}\right) - \frac{\partial p}{\partial b} = 0,$$

qui donne pour λ deux valeurs $\lambda_1 \lambda_2$; le point focal est alors donné par

$$z = -\frac{\partial p}{\partial a} - \lambda \frac{\partial q}{\partial a},$$

$$x = az - p,$$

$$y = bz - q.$$

J'applique cette méthode à la congruence considérée. Soit Δ la droite de Cayley, que je suppose dans le plan zOx, l'origine des coordonnées étant le point spécial de Cayley, et $P_0 \equiv xOy$. Soient (α, O, γ) un deuxième point de Cayley et $z = h$ le point correspondant.

Si l'on pose

$$\frac{\alpha}{h} = m, \qquad \frac{\gamma}{h} = n + 1,$$

la congruence s'écrit

$$(1) \qquad \begin{cases} ap + bq = 0, \\ a^2 + b^2 = ma - n. \end{cases}$$

La deuxième équation montre que a, b ne sont pas indépendants, elle donne la conique à l'∞. Je prends alors pour variables a et q; b ne dépend pas de q. Le point focal est donné par

$$(2) \qquad \begin{cases} az + p - x + \lambda(bz - q - y) = 0, \\ z + \dfrac{\partial p}{\partial a} - \lambda z \dfrac{\partial q}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial q} + \lambda = 0. \end{cases}$$

La dernière donne

$$\lambda = -\frac{\partial p}{\partial q} = +\frac{b}{a}$$

ou

$$\lambda = -\frac{p}{q}.$$

Elle exprime que le plan (2) passe par l'origine. Dès lors, la surface focale est l'enveloppe du plan

$$qx - py = z(aq - bp),$$

mais p, q sont proportionnels à $-b + a$. Le plan s'écrit

$$ax + by = z(a^2 + b^2),$$

ou

$$(3) \qquad ax + by - z(ma - n) = 0.$$

Ainsi la surface focale (deuxième nappe) est l'enveloppe du plan (3).

Soit

$$ux + vy + wz = 0$$

ce plan. On trouve

$$n(u^2 + v^2) - w(mu + w) = 0,$$

qui permet d'étudier le cône. Ce dernier a, du reste, pour équation

$$(m^2 + 4n)y^2 - 4n(x^2 - nz^2 - mxz) = 0.$$

Surfaces développables.

On écrit $\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db}$, d'où facilement

$$m\frac{dq}{q} = \frac{(m - 2a)(ma + 2n)}{2a^3(-a^2 + ma + n)}\,da;$$

le problème est ramené aux quadratures.

Deuxième méthode. — On peut traiter la question par une méthode rentrant tout à fait dans le programme des classes de Spéciales.

Nous savons que les droites considérées, c'est-à-dire les tangentes à l'une des courbes cherchées, doivent

être parallèles aux génératrices d'un cône de deuxième degré. Soit

$$(1) \qquad z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

ce cône. Le cône réciproque

$$(2) \qquad z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (a^2 - b^2 = c^2)$$

sera le cône des normales aux plans osculateurs ou cône des binormales.

Si donc $F(t)$ désigne une fonction arbitraire, l'équation du plan osculateur peut s'écrire

$$(a\cos t)x + (b\sin t)y + z - F(t) = 0;$$

d'où les équations de la courbe sous forme paramétrique :

$$x = \frac{-F'\sin t - F''\cos t}{a},$$

$$y = \frac{+F'\cos t - F''\sin t}{b},$$

$$z = F + F''.$$

En écrivant que les pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes sont dans le plan $z = mx$, on trouve pour déterminer la fonction F

$$L\frac{C}{F} = \int \frac{a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t - mab^2\cos t}{\sin t[c^2\cos t - ma(1 + b^2)]}\,dt,$$

où C est une constante arbitraire. L'une des valeurs de F est

$$F = (1 - \cos t)^{\frac{c^2 - ma}{2c^2}}(1 - \cos t)^{\frac{c^2 + ma}{2c^2}};$$

m est d'ailleurs déterminé en fonction de abc :

$$m = \frac{c}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Si l'on pose $K = \frac{\alpha}{c\sqrt{1+b^2}}$ les courbes cherchées ont pour équations paramétriques

$$(A)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{k[(k+1)t^2+(1-k)]}{2at^{k+1}}, \\ y = \dfrac{1-k^2}{bt^k}, \\ z = \dfrac{k[(k+1)t^2-(k-1)]}{2t^{k+1}}. \end{cases}$$

Il faut adjoindre à ces courbes leurs homothétiques par rapport à l'origine. Elles sont algébriques si k est entier ou fractionnaire. On peut se donner arbitrairement b et k par exemple. Il est facile de vérifier sur les formules (A) que chaque courbe est tracée sur un cône du deuxième degré ayant pour sommet l'origine et lié, comme il a été dit plus haut, au cône directeur.

En effet, on tire de (A) :

$$ax + z = \frac{k(k+1)}{t^{k-1}},$$

$$ax - z = \frac{k(1-k)}{t^{k+1}};$$

d'où

$$a^2x^2 - z^2 = \frac{b^2k^2}{1-k^2}y^2:$$

c'est l'équation du cône cherché.

On peut généraliser ceci et démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *On considère une courbe gauche telle que la podaire d'un point* O *soit plane et que son plan* P_0 *passe par* O. *Soit* C_1 *le cône formé par les parallèles aux tangentes menées par* O, *et soit* C_2 *le cône de sommet* O *sur lequel est la courbe. Ces cônes* C_1, C_2 *sont tels que tout plan parallèle*

à P_0 *les coupe suivant deux courbes* γ_1, γ_2, *telles que* γ_1 *soit la podaire de* γ_2 *par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan de la section.*

La droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

doit avoir une enveloppe et en outre

$$ap + bq = 0.$$

Donc

$$p = \lambda b, \qquad q = -\lambda a;$$

les équations de la droite deviennent

$$x = az + \lambda b,$$
$$y = bz - \lambda a.$$

Je suppose que dans ces formules x, y, z désignent les coordonnées du point de contact de la droite avec son enveloppe. Alors

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1};$$

d'où

$$z\,da + \lambda\,db + b\,d\lambda = 0.$$
$$z\,db - \lambda\,da - a\,d\lambda = 0.$$

Prenons a comme variable. Se donner $b = F(a)$, c'est se donner le cône C_1 ; soit $b' = \frac{db}{da}$:

$$(1) \qquad \lambda = e^{-\int \frac{1+b'^2}{a+bb'}da};$$

λ une fois connu, x, y, z sont donnés par les formules

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{2ab - (b^2 - a^2)b'}{a + bb'},$$

$$\frac{y}{\lambda} = \frac{(b^2 - a^2) - 2abb'}{a + bb'},$$

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{b - ab}{a + bb'}.$$

En formant l'équation du cône C_2, λ disparaît.

Cherchons la section de ce cône par le plan $z = 1$.

Cette section sera définie par

$$(\gamma_2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2ab + (b^2 - a^2)b'}{b - ab'}, \\[2ex] y = \dfrac{(b^2 - a^2) - 2abb'}{b - ab'}; \end{cases}$$

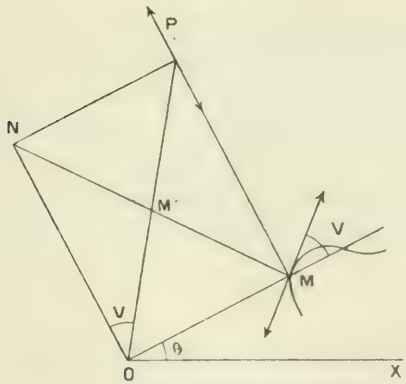
C'est la courbe γ_2 du plan $z = 1$. Posons

$$a = r\cos\theta,$$
$$b = r\sin\theta,$$

r, θ étant les coordonnées polaires de la courbe γ_1,

$$\frac{db}{da} = b' = \operatorname{tang}\alpha.$$

Fig. 2.



Soit V l'angle de la tangente à γ_1 avec le rayon vecteur

$$\alpha = \theta + V;$$

les formules (γ_2) peuvent s'écrire

$$(\gamma_2')\qquad \begin{cases} x = \dfrac{r}{\sin V}\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2} - V\right), \\[2ex] y = \dfrac{r}{\sin V}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2} - V\right). \end{cases}$$

Soient M le point r, θ; N le point $\frac{r \cos V}{\sin V}, \theta + \frac{\pi}{2}$.

Je forme le rectangle MONP; P décrit la courbe γ_2; M′ décrit le lieu du centre d'un cercle passant par O et tangent à γ_1. Si P décrit γ_2, le cercle de diamètre OP enveloppe γ_1; donc γ_1 est la podaire de γ_2.

Cas particulier des courbes (A) *qui ont une droite de Cayley.* — γ_1 doit être un cercle et γ_2 une conique de foyer O; on voit facilement que γ_1 est le cercle principal de la conique γ_2.

Détermination de toutes les courbes qui possèdent un point spécial de Cayley.

Les formules trouvées plus haut résolvent la question, mais la quantité λ est donnée par une quadrature. On peut trouver des formules n'en contenant aucune. Nous trouverons un exemple intéressant d'équations aux dérivées partielles signalées par M. de Tannenberg et qui admettent un groupe continu de transformations. Je prendrai les équations de la ligne droite sous la forme

$$x = az + f, \qquad y = bz + g,$$

et je garderai les lettres p, q pour désigner $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Il s'agit donc de trouver les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe

$$af + bg = 0.$$

Les courbes cherchées seront les courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles, facile à former et qu'on peut écrire sous la forme

$$\text{(B)} \qquad (px + qy - 2z)^2 = (x^2 + y^2)(p^2 + q^2).$$

On aperçoit de suite la solution

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

où k est une constante arbitraire; la transformation de Legendre ne change pas l'équation. Je vais faire voir qu'une transformation ponctuelle change l'équation (B) en l'équation

$$(C) \qquad 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Au lieu de considérer ces équations en p, q, il est plus commode de considérer les équations associées. Par exemple, l'équation associée de (B) sera

$$(B') \qquad z(dx^2 + dy^2) = dz(x\,dx + y\,dy).$$

A tout point (x, y, z) de l'espace, elle fait correspondre une direction (dx, dy, dz) partant de ce point et située sur le cône du complexe. Or, il est facile de transformer (B') pour obtenir la forme

$$(C') \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

associée de (C). En effet (B') peut s'écrire

$$dx^2 + dy^2 = du(x\,dx + y\,dy) \qquad (z = e^u).$$

Je pose

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta,$$

l'équation devient

$$d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 = \rho\,du\,d\rho,$$
$$\frac{d\rho}{\rho} + \rho\frac{d\theta^2}{d\rho} = du \qquad (\rho = e^v).$$
$$dv + \frac{d\theta^2}{dv} = du,$$
$$d\theta^2 = dv(du - dv);$$

d'où facilement la forme indiquée. On trouve ainsi la

transformation pontuelle

$$x' = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

$$y' = \mathrm{L}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}},$$

$$z' = i\,\mathrm{L}\sqrt{z}.$$

qui fait correspondre les courbes cherchées et les minima, ou

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$$

et

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx^2+dy^2}{x\,dx+y\,dy}.$$

Or, une intégrale *complète* de $1+p^2+q^2=0$ se compose de tous les plans tangents au cercle imaginaire de l'∞ :

$$ax' + i\sqrt{1+a^2}\,y' - z' - b = 0,$$

a, b étant deux constantes arbitraires ; elle devient par la transformation

$$\frac{a}{i}\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}\,\mathrm{L}\left(\frac{x^2+y^2}{z}\right) - \mathrm{L}\sqrt{z} - b = 0;$$

d'où facilement

$$z = k e^{2h\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1-h^2}.$$

On a là une intégrale complète de l'équation (B).

Pour $h=0$ on a

$$z = k\sqrt{x^2+y^2};$$

h et k sont les deux constantes arbitraires.

Pour avoir les courbes intégrales, il faut lier h et k par une relation arbitraire et chercher l'enveloppe des surfaces précédentes.

En coordonnées cylindropolaires, cette surface peut

s'écrire

$$z = ke^{2h\varphi}\rho^{1-h^2}.$$

C'est une surface spirale. Les courbes cherchées sont donc l'enveloppe d'une surface spirale

$$z = F(h)e^{2h\varphi}\rho^{1-h^2},$$

quand h varie. F est une fonction abitraire.

Toutes ces courbes admettent un groupe continu de transformations à 10 paramètres. En particulier, le groupe homographique

$$x' = l(hx - ky),$$
$$y' = l(kx + hy),$$
$$z' = l(h^2 + k^2)z,$$

échange les unes dans les autres les droites du complexe

$$af + bg = 0.$$

Note sur les surfaces réglées réciproques et sur la détermination de toutes les surfaces réglées qui admettent une ligne de striction donnée.

Nous allons retrouver la propriété des surfaces réglées réciproques en traitant le problème suivant : *Une courbe étant donnée, trouver toutes les surfaces réglées qui l'admettent comme ligne de striction.*

Considérons le trièdre de Frenet de cette courbe. Soient O un point quelconque de cette courbe, Ox la tangente, Oy la normale principale, Oz la binormale, S l'arc de la courbe. Les projections de la vitesse d'un point sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz sont, en re-

marquant que $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $q = 0$:

$$V_x = \frac{dx}{dt} + \xi - ry = x' + \xi - ry,$$
$$V_y = y' + rx - pz.$$
$$V_z = z' + py.$$

Soit $x = ay$, $y = bz$ la droite qui décrira la surface réglée où a, b varient avec t. Les formules précédentes permettent d'obtenir l'équation du plan tangent. En écrivant que l'origine est le point central, on trouve l'équation

$$\text{(I)} \qquad a'(1 + b^2) - abb' = br(1 + b^2 + a^2).$$

On peut supposer $t = s$, alors $r = \frac{1}{R}$, R étant le rayon de courbure en O. On a d'abord la solution $b = 0$ avec $a = \text{const}$. Si dans (I) on traite b comme une fonction connue de s qu'on se donne, alors a est l'inconnue du problème, et l'on a à résoudre l'équation différentielle (I), qui est *une équation de Riccati*. On voit de suite que cette équation est vérifiée si

$$a^2 + b^2 + 1 = 0.$$

ce qui donne deux solutions en a. On intègre facilement en posant

$$a = u\sqrt{b^2 + 1}.$$

Si l'on remplace dans (I), on trouve, pour déterminer u, l'équation

$$\text{(II)} \qquad \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{br}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

La solution complète du problème est donnée par

les formules

$$a = \frac{r \operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{r^2 - \alpha'^2}},$$

$$b = \frac{\alpha'}{\sqrt{r^2 - \alpha'^2}},$$

où α est une fonction arbitraire de l'arc s et α' sa dérivée; r est la courbure de la courbe donnée.

Interprétation géométrique. — Nous avons pris

$$x = az, \qquad y = bz$$

comme équations de la génératrice par rapport aux axes mobiles. Appelons α l'angle de cette droite avec yOz et β l'angle que forme sa projection sur yOz avec Oz; alors

$$a = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \beta}, \qquad b = \operatorname{tang} \beta;$$

on a bien

$$u = \operatorname{tang} \alpha.$$

La formule (II) devient

$$\text{(III)} \qquad \alpha' = r \sin \beta.$$

Le plan tangent en O, c'est-à-dire le *plan central*, passe par Ox et fait l'angle β avec zOx. Si deux surfaces réglées ont le même plan central, c'est-à-dire si β est le même,

$$d\alpha = d\alpha_1,$$

$$\alpha - \alpha_1 = \text{const.},$$

et réciproquement.

Ainsi, quand on aura une surface répondant à la question, on en aura une autre en menant dans chaque plan central, par le point central, une droite Δ' faisant un angle constant avec la génératrice Δ de la première

surface. Δ' décrira la deuxième. Ces deux surfaces auront même plan tangent tout le long de leur ligne de striction commune. Si Δ, Δ' sont rectangulaires, on a deux surfaces réglées réciproques. Naturellement, les cônes directeurs de ces surfaces sont réciproques (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, Chap. XIV).

Note sur la congruence *hkl*.

Je me suis aperçu en terminant que c'était la congruence formée par les axes des complexes linéaires à trois termes :

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

où λ, μ, ν sont trois paramètres variables, et $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations de trois complexes linéaires fixes (*voir*, par exemple, *Géométrie réglée* de Kœnigs, p. 50). On sait que ces ∞^2 complexes ont en commun les génératrices de l'un des systèmes d'un hyperboloïde H. Les axes coupent ces génératrices à angles droit, ce qui nous conduit à la troisième définition de la congruence. Mais on peut remplacer H par l'un quelconque des hyperboloïdes ayant les mêmes éléments de Cayley. On peut prendre un hyperboloïde dégénéré en faisceaux plans (Koenigs, *Géométrie réglée*, p. 52), on retrouve alors la première définition. Avec ce nouveau point de vue, on retrouve bien facilement les cylindroïdes circonscrits à la surface focale et que j'ai considérés.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Séries entières. Définition. Cercle de convergence. Continuité.*

II. *La tangente en un point* M *d'une courbe* C *rencontre l'axe* Ox *en* T. *Déterminer* C *de façon que le milieu de* MT *décrive la parabole* $y^2 = 2px$.

Construire la courbe C *lorsque la constante d'intégration est nulle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer*

1° $$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-5x+6}};$$

2° $$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

(Novembre 1909.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — A. *On considère la fonction implicite* Z(z) *définie par l'équation*

$$\sin\frac{Z+z}{Z-z} = z.$$

1° *On pose* $Z = A + iB$, $z = a + ib$; A, B, a, b *étant réels, et l'on demande d'exprimer les relations qui lient ces quatre quantités en n'utilisant que des symboles de fonctions réelles de variables réelles;*

2° *Quels sont les points singuliers de* Z; *ces points sont-ils tous de même nature?*

3° *Pour une valeur* z_0 *de* z *on donne deux déterminations* Z'_0, Z''_0 *de* $Z(z)$. *Peut-on faire décrire à* z *un chemin continu faisant passer* Z *de la première détermination à la seconde? Si cela est possible, comment choisira-t-on ce chemin?*

B. *Les axes étant rectangulaires, le plan des* xy *étant horizontal, on considère les courbes de niveau et les courbes de plus grande pente d'une surface* S.

1° *Quelle est l'équation générale des surfaces* S *pour lesquelles les courbes de niveau sont des circonférences? De quel ordre est l'équation aux dérivées partielles caractéristique de ces surfaces? comment la formerait-on?*

2° *Quelle est l'équation générale des surfaces* S *pour lesquelles les courbes de niveau sont des circonférences et pour lesquelles les lignes de plus grande pente se projettent suivant des circonférences sur le plan des* xy?

Ces surfaces sont-elles caractérisées par une équation aux dérivées partielles?

3° *Parmi les surfaces considérées au paragraphe précédent, il y en a qui admettent une ligne de plus grande pente plane. On demande de former l'équation de ces surfaces et de les étudier.*

Épreuve pratique. — *Trouver celles des surfaces* $z = f(x, y)$ *qui satisfont à l'équation*

$$p^2 x - q^2 y = 0$$

et qui passent par la courbe $y = \varphi(z)$, *située dans le plan* $x = 0$, *qui vérifie l'équation*

$$(z^2 - 3z + 2)\frac{dy}{dz} - 2y^2 - 3zy + 3z - 2 = 0,$$

et qui contient le point $x = 1, y = -1, z = 0$.

(Novembre 1909.)

Rennes.

Composition écrite. — I. *On considère les courbes* (C) *qui rapportées à deux axes rectangulaires* Ox, Oz, *ont pour équation*

$$(x^2+z^2)^2-2a^2(x^2-z^2)=0,$$

a désignant une constante arbitraire :

Former l'équation différentielle des courbes (C);

Déterminer leurs trajectoires orthogonales.

Soit M *un point d'une courbe* (C), *et soient* θ *et* α *les angles que forment, avec* Ox, *le rayon* OM *et la tangente en* M *à* (C); *montrer qu'on a*

$$\alpha+\frac{\pi}{2}=3\theta.$$

Calculer le rayon de courbure en M, $R=\frac{1}{3}\frac{ds}{d\theta}$, *s désignant l'arc de la courbe.*

II. *On considère les surfaces* (S) *qui, définies en coordonnées semi-polaires* r, ω *et* z, *ont pour équation*

$$\frac{(r^2+z^2)^2}{r^2-z^2}=f(\omega),$$

$f(\omega)$ *désignant une fonction arbitraire de* ω.

Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfait la fonction z *de* r *et de* ω *qui correspond à l'une quelconque des surfaces* (S).

En supposant que $f(\omega)$ *se réduit à une constante,* $2a^2$, *on obtient une surface* (S′) *de révolution autour de* Oz. *Calculer les deux rayons de courbure principaux de* (S′) *en un point de la méridienne située dans le plan* $\omega=0$.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^2y'''+x^2y''-2xy'-2y=\frac{1}{x^2}+4x^3\sin x+x^4\cos x.$$

(Novembre 1909.)

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

Besançon.

Épreuve écrite. — 1° *Théorie de la parallaxe planétaire; exposer en particulier le développement axuel de* $\frac{h}{a}$. *Formules pratiques pour les applications. Tables.*

2° *Latitude terrestre. Détermination par l'observation de la Polaire et du temps. Mise en nombre de la Connaissance des temps.*

Épreuve pratique. — *Calcul sur le mouvement elliptique.*

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *Méthode des moindres carrés. Principe de la méthode. Formation des équations normales. Calcul des poids des inconnues. Détermination de l'erreur moyenne des mesures.*

Épreuve pratique. — *A Bordeaux (latitude* 44° 50′ 7″), *une étoile* B, *dont l'ascension droite est supérieure de* 1 *heure à celle d'une étoile* A, *se lève* 2 *heures après celle-ci.*

Calculer les coefficients numériques de la relation algébrique qui lie les tangentes des déclinaisons de A *et* B.

(Novembre 1909.)

Grenoble.

Composition. — *Les éléments d'une planète étant connus, calculer ses coordonnées équatoriales à une époque t.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Passage des coordonnées héliocentriques d'une planète à ses coordonnées géocentriques.*

Données :

Coordonnées héliocentriques de la planète

$$l_h = 208^\circ.46'.39''$$
$$\lambda_h = 0.37.42,3$$
$$\gamma_h = 1,5960510$$

Coordonnées géocentriques du Soleil

$$\odot = 248^\circ.11'.28'',2$$
$$\lambda_\odot = 0$$
$$R = 0,9858428$$

(Novembre 1909.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Expliquer en détail comment on établit que le mouvement des planètes satisfait aux trois lois de Képler.*

II. *On considère le lieu géométrique des points de la surface terrestre pour lesquels une étoile* E *se lève ou se couche au moment où elle passe au méridien supérieur à Nancy :*

1° *Trouver les équations de ce lieu en coordonnées rectangulaires ;*

2° *Trouver son équation en coordonnées géographiques (longitude l et latitude φ) ;*

3° *Distinguer sur le lieu les points qui correspondent au lever et au coucher de l'étoile* E.

On connaît le grand axe $2a$ et l'excentricité e du méridien elliptique de la Terre ; on connaît aussi la longitude l_0 de Nancy et la déclinaison δ de l'étoile E. *Les longitudes sont supposées comptées à partir du méridien de Paris et vers l'Est de* 0 *à* 360°.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a, relativement à la planète*

Mercure, les valeurs suivantes pour quatre de ses éléments :

Longitude du nœud ascendant	$\varphi = 46^\circ.33'.9''$
Inclinaison	$i = 7.0.8$
Excentricité	$e = 0,2056$
Longitude du périhélie	$\varpi = 75^\circ 7' 14''$

Quelles sont les valeurs de sa longitude et de sa latitude héliocentriques au moment où son anomalie excentrique est

$$u = 105^\circ 53' 58'',5 \text{ ?}$$

(Juin 1909.)

Rennes.

Composition écrite. — *Étude des éclipses de Soleil et de Lune.*

Épreuve pratique. — *A une certaine époque, la longitude et la latitude géocentriques de la planète Jupiter sont :*

Longitude	$132^\circ 19' 16'',2$
Latitude	$0^\circ 29' 37'',2$

Trouver, pour la même époque, l'ascension droite et la déclinaison, sachant que l'inclinaison de l'écliptique est

$$\omega = 23^\circ 27' 4'',7.$$

(Novembre 1909.)

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Une barre* AB *homogène, pesante, s'appuie par son extrémité* A *sur l'axe* Ox *supposé horizontal, et par son extrémité* B *sur la partie positive de l'axe* Oy *supposé vertical et dirigé vers le haut. On néglige les frottements.*

Trouver le mouvement de la barre, et le temps que la barre mettra à venir s'appliquer sur l'axe des x, en supposant qu'elle parte du repos et fasse primitivement un angle α avec l'horizontale.

II. *Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 3x^2 + e^x + e^{-x}.$$

III. *Calculer jusqu'au terme en x^6 inclusivement le développement de* $\log\cos x$ *suivant les puissances croissantes de x, le signe* log *désignant un logarithme népérien.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire les courbes représentées par l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - e^{-x})(x - 2)(x - 5)}{\sqrt{x(x - 3)(x - 4)(x^2 + 1)}},$$

où x et y représentent des coordonnées rectangulaires.

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trouver les courbes telles que la*

tangente et la normale en chacun de leurs points découpent sur une droite fixe Ox *un segment constant de longueur* $2a$.

Il existe deux familles de courbes C_1 *et* C_2 *jouissant de cette propriété; en un point* M *où passent une courbe* C_1 *et une courbe* C_2 *les tangentes à ces courbes sont également inclinées sur la direction de l'une des bissectrices des axes. Raison géométrique élémentaire de ce fait.*

II. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x}.$$

Que peut-on prendre pour valeur approchée du résultat lorsque a est très grand?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Moments d'inertie d'un cône de révolution homogène par rapport à trois axes rectangulaires passant par le sommet et dont l'un est l'axe du cône.* (*On appellera h la hauteur du cône, r le rayon de la base.*)

Le cône étant suspendu par son sommet et oscillant à la manière d'un pendule composé, on demande la longueur du pendule simple synchrone. (Juillet 1909.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME X, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

C. - Principes du Calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.

		Pages.
C2e	Sur les intégrales curvilignes; par M. *D. Pompéiu*	111
C2g	Extension aux cas des intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes; par M. *M. Fréchet*	241
C2j	Sur les formules de quadrature de Cotes. Généralisation d'une formule d'Euler; par M. *G. Fontené*	87

D. - Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant, en particulier, les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

D6c2	Étude élémentaire d'une série sur son cercle de convergence; par M. *R. d'Adhémar*	305
D6d	Théorie des fonctions hyperboliques; par M. *G. Fontené*	481

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

Pages.

H9d Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies; par M. *E. Turrière* 21

H9f Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées; par M. *V. Jamet* 501

H12d Sur les suites récurrentes; par M. *Amsler* 90

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

I3a Sur les nombres de la forme $X^2 + XY + Y^2$; par M. *G. Fontené* 217

I19c Sur une équation indéterminée; par M. *T. Hayashi* 85

J. — Analyse combinatoire; calcul des probabilités; calcul des variations; théorie générale des groupes de transformations; théorie des ensembles de G. Cantor.

J2g Sur la détermination mathématique des droits de succession des enfants naturels; par M. *H. Picquet* 164

K. — Géométrie et Trigonométrie; géométrie analytique; géométrie projective et descriptive; perspective.

$K^1$1c Note sur la géométrie du triangle; par M. *Auric*. 394

$K^1$2c Sur quelques théorèmes de Géométrie élémentaire; par M. *V. Thébault* 271

$K^1$13a Sur un théorème de Mannheim; par M. *R. Bricard* 128

$K^1$21d Sur la rectification approchée d'un arc de cercle; par M. *Auric* 122

L. - Coniques, quadriques et variétés du second degré.

$L^2$2c Section plane d'un cône ou d'un cylindre à base elliptique, hyperbolique ou parabolique; par M. *Rebeix* 107

Pages.

L²21c Sur un théorème de M. R. Bricard; par M. *H. Lebesgue* 213

M. — Courbes, surfaces et variétés algébriques; courbes, surfaces et variétés transcendantes spéciales.

M¹5cα Construction d'un centre de courbure en un point d'une strophoïde; par M. *R. Bouvaist*. 361

M²7b Surfaces partiellement cylindroïdes; par M. *E. Kerawal* ..... 49 et 529

N. — Complexes et congruences; connexes, systèmes de courbes de surfaces et de variétés; géométrie énumérative.

N¹1i Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard, concernant les tangentes communes à deux quadriques; par M. *E. Turrière* 24

O. — Géométrie infinitésimale et géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes, des surfaces et des variétés; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

O¹3e Sur l'allure d'une courbe; par M. *R. Alexais* .. 289

O¹4f Sur les surfaces réglées rapportées à leurs asymptotiques; par M. *H. Villat* 97

O¹4h Sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées; par M. *V. Jamet* 309

O¹4h Sur les surfaces de Jamet réglées; par M. *R. Bricard* 312

O¹5 Sur un trièdre mobile; par M. *E. Turrière* 193

O¹5j Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures (3e note; par M. *A. Buhl* 385

O¹5s Sur les surfaces de M. Appell; par M. *E. Turrière* 145

R. — Mécanique générale; cinématique; statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

R1a Sur un problème de cinématique navale; par M. *J. Hadamard* 337

Pages.

R1a Sur les accélérations successives; par M. *Ch. Halphen* 433

R1c Sur la « Géométrie des feuillets » de M. René de Saussure, étude analytique; par M. *R. Bricard* 1

R5a Un cas particulier d'attraction d'un corps sur un point éloigné; par M. *E. Turrière* 509

R5c Note sur les champs de forces plans; par M. *Ch. Halphen* 227

R5c Étude sur les champs de forces; par M. *Ch. Halphen* 256

S. — Mécanique des fluides; hydrostatique; hydrodynamique; thermodynamique.

S2a Sur le théorème de Lagrange en hydrodynamique; par M. *H. Villat* 282

X. — Procédés de calcul; tables; nomographie; calcul graphique; planimètres; instruments divers; jeux et récréations.

X10 Théorie algébrique d'un jeu de société; par M. *Haton de la Goupillière* 177

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Calcul différentiel et intégral 130, 317, 569
Analyse supérieure 40, 463
Astronomie 46, 572
Mathématiques générales 235, 511, 575
Géométrie supérieure 470
Mécanique rationnelle 406

Questions de concours.

Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1910. Composition de Géométrie analytique et de Mécanique; solution, par M. *Jean Servais* 364
Composition d'algèbre et de trigonométrie; solution, par M. *Jean Servais* 369
Composition de calcul numérique; solution, par M. *Philbert du Plessis* 377
Concours d'admission à l'École Normale supérieure et aux

Pages

bourses de licence en 1910; Composition de mathématiques; solution, par M. *Jean Servais* 437
Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1910). Sujets des compositions 401

Correspondance.

M. R. Bouvaist : A propos de la question 2110 188
M. G. Fontené : Sur la théorie du tétraèdre 188
M. Philbert du Plessis : A propos de la question 2113 190
M. E.-N. Barisien : Au sujet d'une aire 191
M. Georges Delbouis : Au sujet de la dérivation sous le signe S. 191
M. E. Turrière : Au sujet d'un mémoire antérieur 233
M. Ch. Halphen : Au sujet de l'étude sur les champs de force 460

Bibliographie.

Ernest Lebon : Savants du jour : Henri Poincaré; Compte rendu, par M. *C. B.* 234
F. G. M. : Exercices de géométrie descriptive; Compte rendu, par M. *R. B.* 285
René Baire : Leçons sur les théories générales de l'analyse, Tome II; Compte rendu, par M. *R. B.* 381
Carlo Bourlet : Éléments de statique graphique; Compte rendu, par M. *R. B.* 399

Questions proposées.

2143 48
2144 à 2146 95
2147 à 2150 143
2151 à 2155 239
2156 à 2161 335
2162 430
2163 et 2164 479
2165 à 2168 527

Solutions de questions proposées.

798, par M. *H. Brocard* 472
2100, par M. *G. F.* 330
2108, par M. *R. B.* 136
2115, par M. *Clapier*, *un anonyme* 137
2117, par *un abonné* 139
2122, par M. *Parrod* 140

Pages.
2123, par M. *Parrod* 141
2124, par M. *A. Duby* 141
2125, par M. *L. Klug* 142
2126, par M. *E.-N. Barisien* 280
2128, par M. *R. Bouvaist* 424
2129, par M. *R. Bouvaist* 333
2130, par M. *L. Giraudon* 424
2131, par M. *Thié* 425
2132, par M. *R. Bouvaist* 426
2133, par M. *Thié* 427
2134, par MM. *R. Bouvaist*, *F. Farjon* 428
2135, par M. *R. Bouvaist* 430
2136, par M. *Parrod* 431
2137, par M. *R. B.* 475
2138, par Mlle *Rita Muréje* 477
2139, par M. *R. Bouvaist* 478
Note 288

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS
(TOME X, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

R. D'ADHEMAR, 303.
Agronomof, 141, 142.
ALEZAIS, 289.
Amigues, 33.
Ampère, 153.
AMSLER, 90.
P. Appell, 23, 32, 145, 282.
Aschieri, 33.
AURIC, 122, 394.

R. Baire, 297.
R. Ball, 20.
E.-N. BARISIEN, 96, 140, 141, 144, 191, 240, 286, 334, 424, 425, 426, 427, 428, 528.
E.-N. Barisien, 141, 424.
Baltaglini, 33.
J. Bertrand, 297.
A.-D. Betto, 142, 425, 427.
Bianchi, 145, 196, 296.
O. Bonnet, 23, 26, 148.
H. Bouasse, 38.
C. Bourlet, 206, 399.
P. Boutroux, 389.
BOUVAIST, 188, 361, 424, 426, 428, 430, 478.
Bouvaist, 137, 139, 141, 142, 143, 275, 288, 333, 425, 478.
R. BRICARD, 1, 128, 137, 144, 286, 336.
R. Bricard, 24, 213, 220, 501.
H. BROCARD, 472.
A. BUHL, 385.
A. Buhl, 212.

CANON, 137.
Catalan, 168.
Cayley, 49.
Chasles, 25, 475.
E. Chenon, 168.
CLAPIER, 138, 140.
Cotes, 87.
Cournot, 168.
G. CUNY, 286, 333, 424.

G. Darboux, 25, 31, 75, 97, 152, 195, 390, 433.
G. Darwin, 235.
O. Degel, 312.
G. DELBOUIS, 191.
DUBY, 142.
Duby, 141, 143.
H.-E. Dudeney, 144.

Eck, 33.
M. F. EGAN, 214.

E. Faguet, 235.
F. Farjon, 429.
P. Favre, 141.
G. Fontené, 87, 96, 140, 188, 217, 239, 331, 332, 335, 336, 432, 475, 478, 480, 481.
M. Fréchet, 241.
Fuss, 475.

Gauss, 21.
R. Gilbert, 335.
R. Gilbert, 297.
Giraudon, 424.
Giraudon, 141, 142, 143, 334, 424, 426.
F.-G.-M., 285.
E. Goursat, 24, 106, 145, 296.
Gudermann, 475.
R. Guimaraës, 509.

Haag, 301.
J. Hadamard, 337.
J. Hadamard, 107.
Ch. Halphen, 227, 256, 433, 460.
Haton de da Goupillière, 117.
T. Hayashi, 83.
Hoüel, 297.
G. Humbert, 295.

V. Jamet, 309, 501.
C. Jordan, 245, 295.
E. Keraval, 49, 529.
Klug, 336, 527.
Klug, 141, 143, 240, 427, 431, 478, 479.
Kneser, 292.
Kœnigs, 5, 8, 79, 97.

Lagrange, 282.
C.-A. Laisant, 511.
U. Lala, 509.
Laplace, 99.
de la Vallée Poussin, 290.
H. Lebesgue, 213.
Enneper, 147.
Euler, 5, 87.
H. Lebesgue, 227.
E. Lebon, 234.
A.-M. Legendre, 83.
Lemaire, 478.
P. de Lépinay, 141.
G. Lery, 31.
Letierce, 528.
Lévy, 299.
Lez, 141, 334, 431.
S. Lie, 40, 205.
R. von Lilienthal, 310.
Liouville, 25, 100, 204.
E. Lucas, 84.

Von Mangoldt, 290.
Mannheim, 128, 275.
F. Masson, 235.
J. de Mézéas, 143.
Ch. Michel, 276.
Minding, 201.
Monge, 153.
Morera, 224.
R. Murège, 478.
R. Murège, 431, 432, 479.

Niewenglowski, 299.

M. d'Ocagne, 336.
M. d'Ocagne, 123, 288.

Parrod, 140, 141, 431.
Parrod, 478, 479.
Pascal, 299.
Pélissier, 141, 188, 431.
Philbert du Plessis, 190, 377.
E. Picard, 205, 298.
H. Picquet, 164.
H. Poincaré, 207, 234, 390.
D. Pompeiu, 221.

G. Rados, 235.
Raffy, 106, 296, 312, 501.
R. Ravosco, 142.
Rebeix, 107.
Riemann, 227.
Riesz, 241.

W. Roberts, 475.
O. Rodrigues, 4.
Rouché, 299.

de Saint-Venant, 301.
Salmon, 297.
R. de Saussure, 1.
Scheffers, 296.
Serret, 297, 475.
J. Servais, 364, 369, 438, 448, 456.
P. Sondat, 48.
P. Sondat, 143.
Steiner, 147.
Stieltjes, 241.
Study, 4.
Sturm, 34.

J. Tannery, 83.
G. Teixeira, 472.
Terquem, 475.
Tétu, 431.
V. Thébault, 95, 271.
Thié, 425, 427.
Tortolini, 475.
Turrière, 21, 24, 145, 193, 233, 506.

Vaulot, 140, 141.
H. Vergne, 435.
Vidal, 337.
H. Villat, 97, 282.
H. Villat, 309.

Wallis, 38.
Weingarten, 164.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
44554 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.69

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY